23aB3

フレネル回折場におけるフラクタル的スペックルの軸方向相関特性

Axial correlation properties of fractal speckles in the Fresnel diffraction region

°辻野 賢治、魚住 純*
Kenji Tsujino and Jun Uozumi*
北海道大学 電子科学研究所、北海学園大学 工学部*
Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University,
Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University*

When a rough surface is illuminated by the light having a power-law spatial intensity distribution, the speckle patterns prodused in lateral observation planes in the Fresnel diffraction region are known to have fractal properties. In the present study, axial correlation properties are investigated theoretically for such speckle patterns. It is shown that axial intensity correlation function of the fractal speckles approaches a power function for small values of the argument.

1．はじめに

スリガラスのような拡散透過物体を強度分布がべき則に従う光で照射すると、その透過光中のフレネル場の観測面において、クラスター状のスペックルパターンが生じ、その強度相関関数はべき関数に比例する[1,2]。これは、スペックルパターンの強度相関関数が、照射する光の強度分布に依存することに由来する。相関関数がべき関数となる特性はランダムなフラクタルに見られる特徴であり[3]、このようなスペックルはフラクタル性を有するとみなすことができる。

本報告では、このようなフレネル回折場に生じるフラクタル的スペックルの軸方向相関特性について理論的に考察する。

2．理論

はじめに、拡散透過物体をコヒーレントな光で照射する場合を考える。このとき、フレネル回折場に生じるスペックルの３次元規格化強度相関関数として $\mu(\Delta x', \Delta y', \Delta z)$ (ただし、$\Delta x' = x_1/z_1 - x_2/z_2, \Delta y' = y_1/z_1 - y_2/z_2, \Delta z = z_1 - z_2$) を考えると、その光軸方向の相関関数 $\mu(\Delta z) = \mu(0,0,\Delta z)$ は以下のようになる。

$$\mu(\Delta z) = \frac{1}{S^2}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}|P(\rho,\theta)|^2 \exp\left[-i\frac{k}{2z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\rho^2\right]\rho d\rho d\theta\right|^2 \tag{1}$$

ここで ρ は粗面内の光軸からの距離、λ は入射光の波長、z は伝播距離、$k = 2\pi/\lambda$、$|P(\rho,\theta)|^2$ は瞳関数、$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}|P(\rho,\theta)|^2\rho d\rho d\theta$ である。

次に、拡散透過物体に強度分布がべき則に従う光を照射する場合を考える。べき関数は原点に特異点をもつため、Fisher-Burford の式 $|P(\rho,\theta)|^2 = [1+\alpha^2\rho^2]^{-D/2}$ を用いることにより、特異点を回避する。ここで、α は原点付近の関数の振舞いを制御する定数である。このとき、(1) 式は $0 < D < 2$ において

$$\begin{aligned}\mu(\Delta z) \propto\ & \frac{\pi^2}{\alpha^2 S^2}\left|-i\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)e^{i\frac{D\pi}{4}}\left(\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\right)^{\frac{D}{2}-1}\right.\\ & -\frac{1}{2-D}\left[{}_1F_1\left(1-\frac{D}{2};2-\frac{D}{2};i\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\right)+{}_1F_1\left(1-\frac{D}{2};2-\frac{D}{2};-i\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\right)\right]\\ & \left.+\frac{i}{2-D}\left[{}_1F_1\left(1-\frac{D}{2};2-\frac{D}{2};i\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\right)-{}_1F_1\left(1-\frac{D}{2};2-\frac{D}{2};-i\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\right)\right]\right|^2\end{aligned} \tag{2}$$

となる。ここで、$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、${}_1F_1(\cdot;\cdot;\cdot)$ は合流型超幾何関数である。

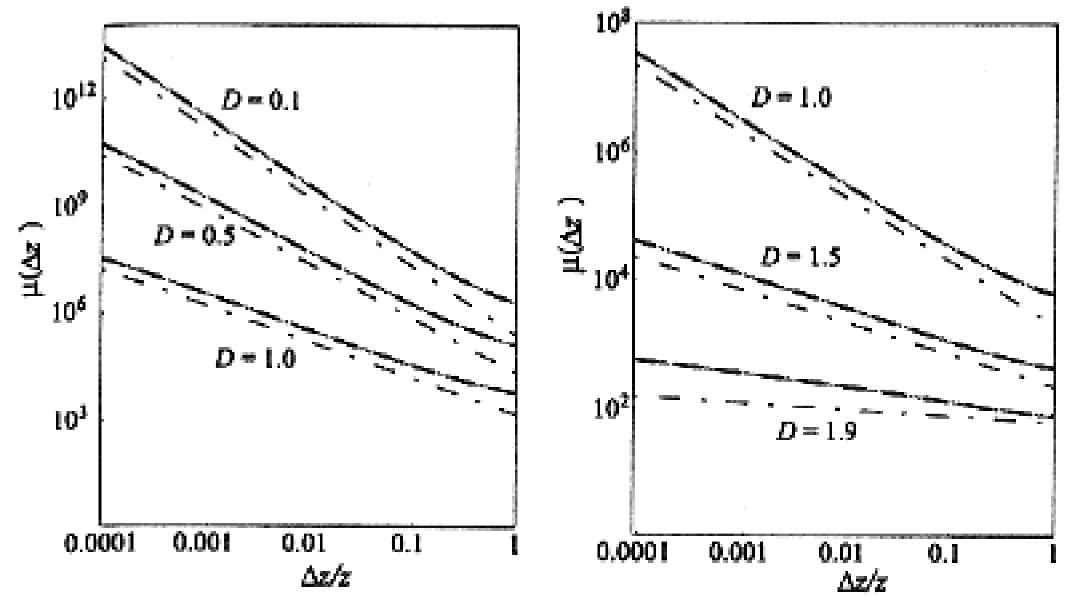

Fig. 1. Theoretical curves of the axial intensity correlation function $\mu(\Delta z)$ of fractal speckles. Asymptotic behaviors of Eq.(3) are shown by dashed lines.

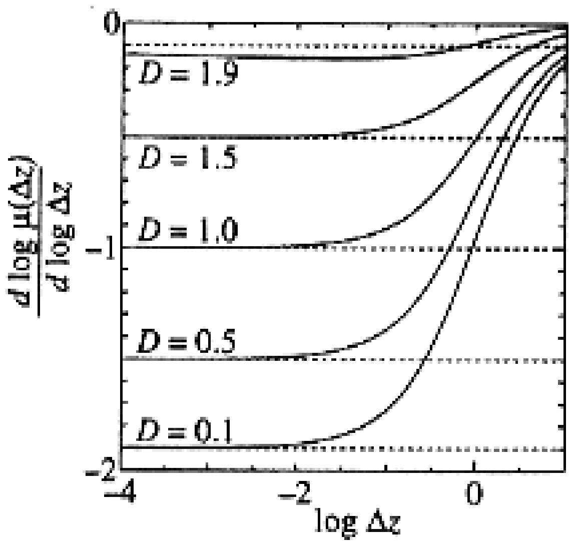

Fig. 2. Variations of the derivative $d\log\mu(\Delta z)/d\log\Delta z$ of the axial intensity correlation function $\mu(\Delta z)$.

(2) 式は、$\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z} \ll 1$ のとき、次のような漸近的な振舞いを示す。

$$\mu(\Delta z) \propto \frac{\pi^2}{\alpha^4 S^2}\left|-i\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)e^{i\frac{D\pi}{4}}\left(\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\right)^{\frac{D}{2}-1} - \frac{2}{2-D} - \frac{2}{4-D}\left(\frac{k}{2\alpha^2 z}\frac{\Delta z/z}{1+\Delta z/z}\right)\right|^2 \tag{3}$$

3．考察

(2) 式と (3) 式を両対数表示したものをそれぞれ実線と破線で Fig.1 に示す。ただし、$k/2\alpha^2 z = 1$ を用いた。また鎖線は $(\Delta z/z)^{D-2}$ に比例した関数を表している。Fig.1 から分かるように、(3) 式は (2) 式の良い近似となっており、また、$\Delta z/z \ll 1$ においては、(2) 式と (3) 式はほぼ $(\Delta z/z)^{D-2}$ のべき関数の振舞いを示す。

次に、(3) 式の対数を $\log\Delta z$ で微分した $d\log\mu(\Delta z)/d\log\Delta z$ の $\log\Delta z$ に対する変化を Fig.2 に示す。この導関数が一定値になるなら、すなわち

$$\frac{d\log\mu(\Delta z)}{d\log\Delta z} = b$$

のとき、(3) 式の相関関数は b を指数とするべき関数となる。Fig.2 において、$\log\Delta z$ の減少にともない導関数の値は一定値に収束していく。$D = 0.1,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 1.9$ のときそれぞれ、$b = -1.9$、-1.5、-1.0、-0.5、-0.1 に収束しており、べき関数の指数は $b = D-2$ であることが確認できる。

これらの考察から、$\Delta z/z \ll 1$ においては軸方向の相関関数は漸近的に

$$\mu(\Delta z) \propto \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^{D-2} \tag{4}$$

で表わされ、軸方向の強度分布もフラクタル的振舞いを示すとみなることができる。

一般に、ランダムなフラクタルのフラクタル次元を D'、フラクタル物体が存在する空間のユークリッド次元を d とすると、相関関数 $C(\boldsymbol{r})$ は $C(\boldsymbol{r}) \propto \boldsymbol{r}^{D'-d}$ で与えられる。光軸方向の強度分布を考える場合は、$d=1$ であるから (4) 式から $D' = D-1$ が得られる。したがって、D の範囲が $1 < D < 2$ のとき、軸方向のスペックル強度のフラクタル次元 D' は $0 < D' < 1$ となると考えられる。

4．まとめ

フラクタル的スペックルの軸方向相関特性について理論的な考察を行った。その結果、フレネル回折場で観測されたフラクタル的スペックルの強度パターンの相関特性と同様に、強度相関関数が照射するべき関数の指数に対応したべき関数となることを示した。今後は、実験による検証を行う予定である。

参考文献

1) 辻野賢治、魚住純：1999 年春季応用物理学関係連合講演会講演予稿集、p. 1022 (28p-ZN-1).
2) J. Uozumi et al., *Proc. SPIE* **3749**, pp. 322-323 (1999).
3) K. Uno, J. Uozumi and T. Asakura, *Opt. Commun.* **124**, 16 (1996).