

# ガウシヤンスペックルの等確率密度楕円

高 井 信 勝\*

## Equi-Probability Density Ellipse in Gaussian Speckle

Nobukatsu TAKAI\*

### Abstract

The behavior of the equi-probability density ellipse describing the statistical properties in the complex plane is theoretically investigated with respect to the Gaussian speckle field. For this purpose the Gaussian statistics has been employed for the optical field emerging from a scattering object. The general formula have been first given for the scattered field and then applied to the Gaussian speckle field. Particularly the behavior of the equi-probability density ellipse for optical field in the Fraunhofer diffraction is shown numerically.

### 1. はじめに

単色の光の空間分布は解析信号の表示に基づいて複素振幅によって記述される。任意の空間座標  $(x, y)$  をベクトル  $\mathbf{x}$  で表すと、その点  $\mathbf{x}$  における複素振幅は

$$A = \sqrt{I} \exp(i\theta) \quad (1)$$

とかかれ、強度  $I$  と位相  $\theta$  で決まる<sup>1,2)</sup>。ここで、 $A$ ,  $I$ ,  $\theta$  は空間座標  $\mathbf{x}$  の関数であるが、具体的にどのような関数であるかは、Helmholtz の波動方程式に境界条件を与えてそれを解くことによって完全に決定できる。しかし、スペックル場を与えるような拡散物体やランダムに分布す

---

\* 北海学園大学工学部電子情報工学科

Department of Electronics and Information Science, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

る散乱粒子に対して境界条件を設定し、波動方程式の解を求めることは現実的に不可能である。したがって、スペックルの強度  $I$ 、位相  $\theta$  を実数のランダム変数として、また複素振幅  $A$  は複素ランダム変数として取り扱い、スペックルの特性はこれらのランダム変数の統計的な性質として明らかにされる。本稿では、このような観点からスペックル場の統計的な特性を複素振幅に関する複素平面での等確率密度楕円<sup>2)-7)</sup>の振る舞いとして理論的に解析した。

## 2. 光波の複素平面表示

スペックル複素振幅  $A$  を実数部  $A_r$  と虚数部  $A_i$  に分けて

$$A = A_r + iA_i \quad (2)$$

と表すと、

$$A_r = \sqrt{I} \cos \theta, \quad A_i = \sqrt{I} \sin \theta \quad (3)$$

である。このとき、スペックル強度と位相は

$$I = A_r^2 + A_i^2 \quad (4)$$

$$\theta = \tan^{-1}(A_i/A_r) \quad (5)$$

であって、複素振幅の実数部と虚数部で決まる。なお、スペックルの位相は場を強度として観測した場合には、直接測定し得ない物理量であるが、散乱物体からのスペックル場に参照波を加えて行う干渉測定にとっては重要な役割を果たす。

確率過程にあるスペックル場を統計的に完全に記述しようとするとき、強度  $I$ 、位相  $\theta$  を与える  $A_r$  と  $A_i$  の統計的な性質を知らなければならない。たとえば、平均強度を考えると、

$$\langle I \rangle = \langle A_r^2 \rangle + \langle A_i^2 \rangle = \langle A_r \rangle^2 + \langle A_i \rangle^2 + \langle \Delta A_r^2 \rangle + \langle \Delta A_i^2 \rangle \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $\langle \dots \rangle$  は集合平均を表し、 $A_r = \langle A_r \rangle + \Delta A_r$ 、 $A_i = \langle A_i \rangle + \Delta A_i$  であって  $\Delta A_r$ 、 $\Delta A_i$  はそれぞれ平均値  $\langle A_r \rangle$ 、 $\langle A_i \rangle$  のまわりの振幅ゆらぎである。したがって、 $\langle \Delta A_r^2 \rangle$ 、 $\langle \Delta A_i^2 \rangle$  は実数部と虚数部の分散に他ならない。式(6)は、スペックル平均強度  $\langle I \rangle$  が複素振幅の実数部と虚数部の平均値  $\langle A_r \rangle$ 、 $\langle A_i \rangle$  と分散  $\langle \Delta A_r^2 \rangle$ 、 $\langle \Delta A_i^2 \rangle$  によって与えられることを意味している。このように、スペックルの統計は複素振幅の複素平面上の分布に関係していることが分かる。この一例に限らず、複素平面上のスペックル複素振幅の分布とスペックル強度および位相の分布は密接に関係している。Fig. 1 は複素平面上の複素振幅の分布(上)と対応する位相の確率密度分布(下)の関係を示す概念図である。

いま、複素平面上での結合確率密度関数を  $p_{r,i}(A_r, A_i)$  とすると強度と位相の結合確率密度関数は  $p_{r,\theta}(I, \theta)$  は

$$p_{r,\theta}(I, \theta) = (1/2)p_{r,i}(A_r, A_i) = (1/2)p_{r,i}(\sqrt{I} \cos \theta, \sqrt{I} \sin \theta) \quad (7)$$

として得られる。ここで、定数因子(1/2)は変数変換に伴う定数でヤコビアン $\|J\|$ の絶対値

$$\|J\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial I} & \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial A_i}{\partial I} & \frac{\partial A_i}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1/2)I^{-1/2} \cos \theta & -I^{1/2} \sin \theta \\ (1/2)I^{-1/2} \sin \theta & -I^{1/2} \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

から生じる。

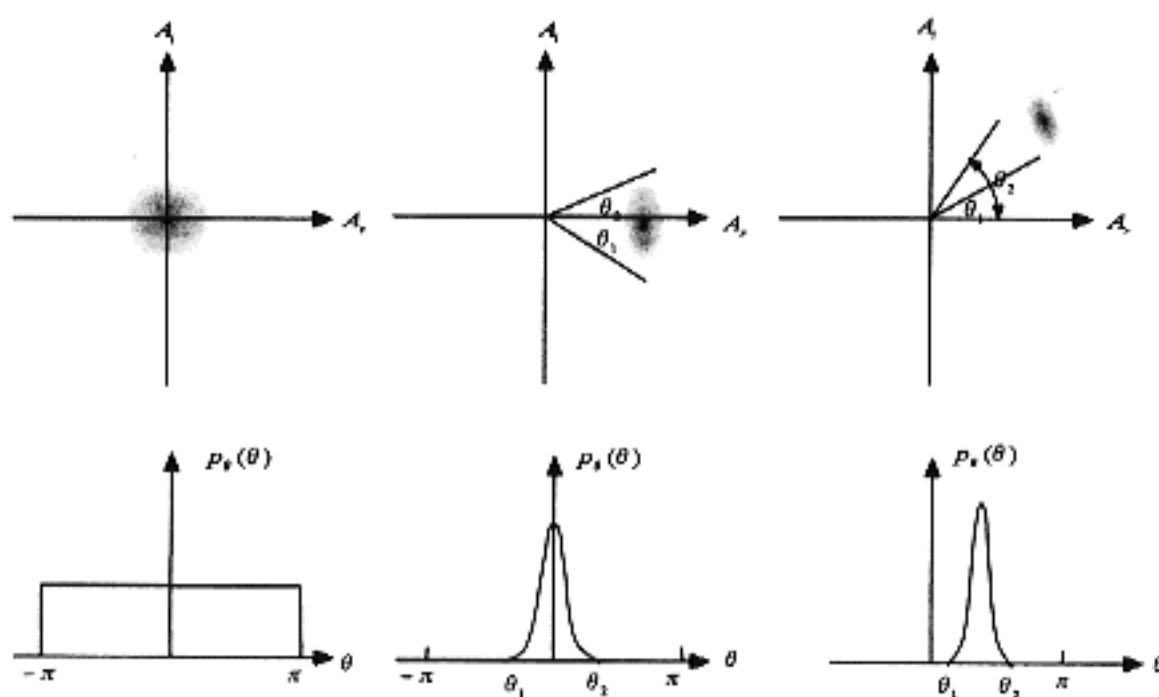


Fig. 1 複素平面上の分布 (上) と各々に対応する位相の確率密度分布 (下) の概念図

スペックル強度  $I$  と位相  $\theta$  の確率密度関数は、式(7)の周辺確率密度関数として

$$p_I(I) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{r,\theta}(I, \theta) d\theta \quad (9)$$

$$p_\theta(\theta) = \int_0^{\infty} P_{r,\theta}(I, \theta) dI \quad (10)$$

で与えられる。

## 2.1 回折界スペックルの複素振幅

回折界で観測されるスペックル場は、ランダムな散乱体からの線形な系の光波の伝搬によって記述される。そこで、Fig.2に示すように物体面と観測面の空間座標をそれぞれベクトル $\xi = (\xi, \eta)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ とし、その間の伝搬関数を $K(\xi, \mathbf{x})$ としよう。

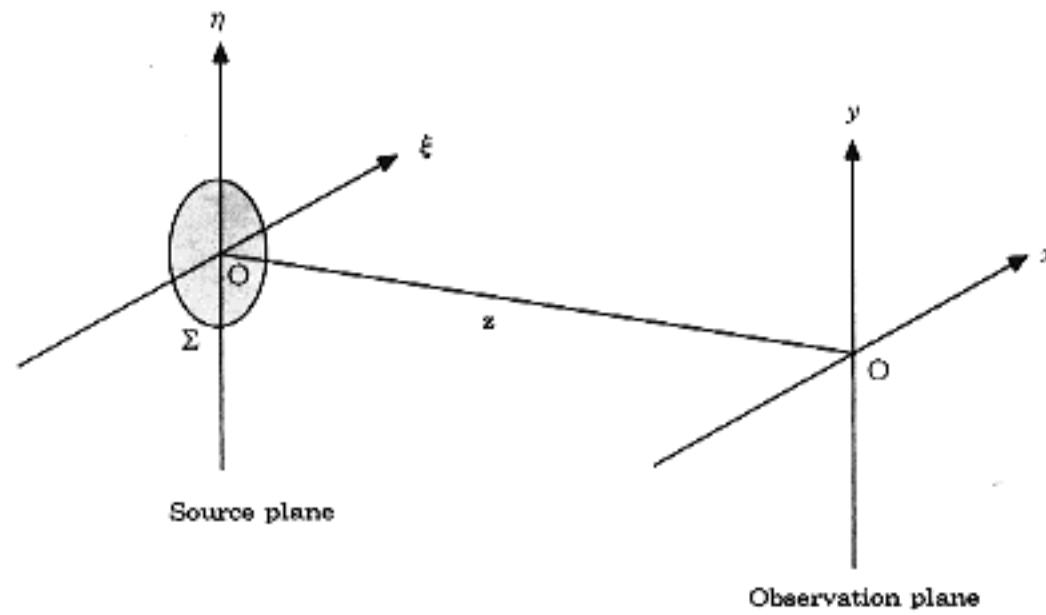


Fig. 2 光波の伝搬系

物体面を出射する光波は、散乱体の反射率（あるいは透過率）と照明光の振幅分布 $E(\xi)$ と散乱体の微視的な構造によって与えられるランダム位相 $\phi(\xi)$ を持つと考える。このとき、観測面における複素振幅分布は

$$A(\mathbf{x}) = \int E(\xi) \exp[i\phi(\xi)] K(\xi, \mathbf{x}) d\xi \quad (11)$$

とかける。一般に、 $E(\xi)$ ,  $K(\xi, \mathbf{x})$ はともに複素数の関数であるので

$$E(\xi) = |E(\xi)| \exp[i\phi_\xi(\xi)] \quad (12)$$

$$K(\xi, \mathbf{x}) = |K(\xi, \mathbf{x})| \exp[i\phi_K(\xi, \mathbf{x})] \quad (13)$$

とし、

$$T(\xi, \mathbf{x}) = E(\xi) K(\xi, \mathbf{x}) = |T(\xi, \mathbf{x})| \exp[i\phi(\xi, \mathbf{x})] \quad (14)$$

を定義すると、式(11)は

$$A(\mathbf{x}) = \int |T(\xi, \mathbf{x})| \exp[i\{\phi(\xi) + \phi(\xi, \mathbf{x})\}] d\xi \quad (15)$$

とかける。ここで、

$$|T(\xi, \mathbf{x})| = |E(\xi)K(\xi, \mathbf{x})| \quad (16)$$

$$\varphi(\xi, \mathbf{x}) = \varphi_E(\xi, \mathbf{x}) + \varphi_K(\xi, \mathbf{x}) \quad (17)$$

である。 $T(\xi, \mathbf{x})$ は照明光と光学系の幾何学的な配置によって決まる確定した関数である。以下では、これをシステム関数と呼ぶことにする。このシステム関数の導入によって議論は幾分抽象化するけれども、これによって任意の光学配置におけるスペックルの統計的な性質を統一的に記述することができる。すなわち、散乱体を照射する光の巨視的な振幅分布 $E(\xi)$ が与えられた上で、光学系の伝搬関数 $K(\xi, \mathbf{x})$ として自由空間における伝搬関数—フレネル伝搬関数やフランホーファー伝搬関数—を適用することで回折界のスペックルを論じることができる。また、結像系においては伝搬関数として点像の広がり関数を用いると像界のスペックルにもここでの議論は適用できる。

式(15)の複素振幅の実数部と虚数部は

$$A_r = \int |T(\xi, \mathbf{x})| \cos[\phi(\xi) + \varphi(\xi, \mathbf{x})] d\xi \quad (18)$$

$$A_i = \int |T(\xi, \mathbf{x})| \sin[\phi(\xi) + \varphi(\xi, \mathbf{x})] d\xi \quad (19)$$

で与えられる。このように、複素平面におけるスペックルの複素振幅は、散乱体によって与えられるランダム位相 $\phi(\xi)$ に起因して同様にランダム変数であり、その特性はシステム関数 $T(\xi, \mathbf{x})$ と通して用いる光学系の配置にも依存する。

## 2.2 ランダム位相の統計

散乱体から出射する光波の位相は散乱体の微視的なランダム構造に起因するもので、その変動を厳密に知ることは不可能であり、たとえまた、それが知り得たとしてもそれ自体がランダム変数であって物理的な評価に直接用いることはできない。式(18), (19)で与えられる複素振幅の統計的な特性を論じるためには、ランダム位相 $\phi(\xi)$ の確率密度関数を知ることであるが、これとてアприオリに知られるものではない。これに対しては、多くの場合、最も現実を反映すると考えられる数学的なモデルであるガウス確率過程が適用される。

物体から出射した直後のランダム位相 $\phi(\xi)$ が空間的に定常であって、平均値がゼロのガウス統計に従う場合、 $\phi(\xi)$ の確率密度関数および異なる点における2つの位相 $\phi(\xi_1)$ ,  $\phi(\xi_2)$ の結合確率密度関数は

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\sigma_\phi^2}\right) \quad (20)$$

$$p(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_\phi^2\sqrt{1-\rho_\phi^2}} \exp\left[-\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2}{2\sigma_\phi^2}\right] \quad (21)$$

で与えられる。ここで、 $\phi_1 = \phi(\xi_1)$ 、 $\phi_2 = \phi(\xi_2)$ であり、空間的定常性のもとで

$$\sigma_\phi^2 = \langle \phi_1^2 \rangle = \langle \phi_2^2 \rangle \quad (22)$$

$$\rho_\phi = \rho_\phi(\xi_1 - \xi_2) = \frac{\langle \phi(\xi_1) \phi(\xi_2) \rangle}{\sigma_\phi^2} \quad (23)$$

である。 $\sigma_\phi^2$ と $\rho_\phi$ はそれぞれ散乱物体から出射する光波の位相の分散と相関係数で散乱体の微視的な構造の統計的な性質に関係している。

ここで、以下の議論で用いられるランダム位相 $\phi(\xi)$ に関する幾つかの統計量を与えておく。まず、式(20)を用いると

$$\langle \phi^{2m} \rangle = (2m-1)!! \langle \phi^2 \rangle^m \quad (24)$$

$$\langle \phi^{2m+1} \rangle = 0 \quad (25)$$

であることがわかる。なお、 $(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)$ である。この関係を用いると

$$\langle \exp(i\phi) \rangle = \exp\left(-\frac{\langle \phi^2 \rangle}{2}\right) = \exp(-\sigma_\phi^2/2) \quad (26)$$

が得られる。 $\phi$ がゼロ平均ガウス変数であるときは $\phi_1 \pm \phi_2$ もまたゼロ平均ガウス変数であるので式(26)を用いると

$$\langle \exp(i(\phi_1 \pm \phi_2)) \rangle = \exp\left(-\frac{\langle (\phi_1 \pm \phi_2)^2 \rangle}{2}\right) = \exp(-\sigma_\phi^2[1 \pm \rho_\phi]) \quad (27)$$

を得る。式(24)–(26)を用いることによって

$$\langle \cos \phi \rangle = \exp\left(-\frac{\sigma_\phi^2}{2}\right) \quad (28)$$

$$\langle \sin \phi \rangle = 0 \quad (29)$$

$$\langle \cos \phi_1 \cos \phi_2 \rangle = \exp(-\sigma_\phi^2) \cosh(\sigma_\phi^2 \rho_\phi) \quad (30)$$

$$\langle \sin \phi_1 \sin \phi_2 \rangle = \exp(-\sigma_\phi^2) \sinh(\sigma_\phi^2 \rho_\phi) \quad (31)$$

$$\langle \sin \phi_1 \cos \phi_2 \rangle = 0 \quad (32)$$

$$\langle \cos \phi_1 \sin \phi_2 \rangle = 0 \quad (33)$$

が得られる。

式(30)、(31)に含まれる相関係数 $\rho_\phi$ は、位相の空間的な相関の広がりを示すパラメータとしての物理的な意味を持ち、厳密な関数形を要求されない場合が多い。そこで、近似的に $\rho_\phi$ を次式で近似する。

$$\rho_\phi = \rho_\phi(\xi_1 - \xi_2) = \begin{cases} 1, & |\xi_1 - \xi_2| \leq \sqrt{\Delta S_\phi} \\ 0, & |\xi_1 - \xi_2| \geq \sqrt{\Delta S_\phi} \end{cases} \quad (34)$$

ここで、 $\Delta S_\phi$  はランダム位相 $\phi(\xi)$ の相関領域の面積で $\sqrt{\Delta S_\phi}$ が相関長に相当する。この近似のもとで次式が成立することが容易に確かめられる。

$$\cosh(\sigma_\phi^2 \rho_\phi) = 1 + (\cosh(\sigma_\phi^2) - 1) \rho_\phi(\xi_1 - \xi_2) \quad (35)$$

$$\sinh(\sigma_\phi^2 \rho_\phi) = \sinh(\sigma_\phi^2) \rho_\phi(\xi_1 - \xi_2) \quad (36)$$

さらに、 $\rho_\phi$ の相関長が極めて微視的であることを考慮して、「白色雑音近似」が許されるときには

$$\rho_\phi(\xi_1 - \xi_2) = \Delta S_\phi \delta(\xi_1 - \xi_2) \quad (37)$$

としてよい。なお、 $\delta(\xi_1 - \xi_2)$ は2次元の $\delta$ 関数である。式(34)–(36)を式(30), (31)に用いると

$$\langle \cos \phi_1 \cos \phi_2 \rangle = \exp(-\sigma_\phi^2) [1 + \Delta S_\phi (\cosh \sigma_\phi^2 - 1) \delta(\xi_1 - \xi_2)] \quad (38)$$

$$\langle \sin \phi_1 \sin \phi_2 \rangle = \Delta S_\phi \exp(-\sigma_\phi^2) (\sinh \sigma_\phi^2) \delta(\xi_1 - \xi_2) \quad (39)$$

となる。

### 2.3 複素振幅の平均値、分散、相関係数

前章までの準備のもとで、複素振幅の複素平面での種々の統計量が任意のシステム関数 $T(\xi, \mathbf{x})$ に対して得られる。まず、 $A_r, A_i$ の平均値は式(18), (19)に式(24), (25)を適用して

$$\langle A_r \rangle = \exp(-\sigma_\phi^2/2) \int |T(\xi, \mathbf{x})| \cos \varphi(\xi, \mathbf{x}) d\xi \quad (40)$$

$$\langle A_i \rangle = \exp(-\sigma_\phi^2/2) \int |T(\xi, \mathbf{x})| \sin \varphi(\xi, \mathbf{x}) d\xi \quad (41)$$

となる。また、 $A_r, A_i$ の分散と相関係数は

$$\sigma_r^2 = \langle \Delta A_r^2 \rangle = \langle A_r^2 \rangle - \langle A_r \rangle^2 \quad (42)$$

$$\sigma_i^2 = \langle \Delta A_i^2 \rangle = \langle A_i^2 \rangle - \langle A_i \rangle^2 \quad (43)$$

$$\rho = \langle \Delta A_r, \Delta A_i \rangle / \sigma_r \sigma_i = [\langle A_r A_i \rangle - \langle A_r \rangle \langle A_i \rangle] / \sigma_r \sigma_i \quad (44)$$

で定義されるので、2次モーメント $\langle A_r^2 \rangle, \langle A_i^2 \rangle, \langle A_r A_i \rangle$ を式(38), (39)を適用して求めると、多少の計算ののち、

$$\sigma_r^2 = (\Delta S_\phi / 2) B(\mathbf{x}) [1 - \exp(-\sigma_\phi^2)] [1 - \exp(-\sigma_\phi^2) C(\mathbf{x})] \quad (45)$$

$$\sigma_i^2 = (\Delta S_\phi / 2) B(\mathbf{x}) [1 - \exp(-\sigma_\phi^2)] [1 - \exp(-\sigma_\phi^2) C(\mathbf{x})] \quad (46)$$

$$\sigma_r \sigma_i \rho = -(\Delta S_\phi / 2) \exp(-\sigma_\phi^2) [1 - \exp(-\sigma_\phi^2) B(\mathbf{x}) S(\mathbf{x})] \quad (47)$$

を得る。ここで、

$$B(\mathbf{x}) = \int |T(\xi, \mathbf{x})|^2 d\xi \quad (48)$$

$$C(\mathbf{x}) = \frac{\int |T(\xi, \mathbf{x})|^2 \cos 2\varphi(\xi, \mathbf{x}) d\xi}{B(\xi)} \quad (49)$$

$$S(\mathbf{x}) = \frac{\int |T(\xi, \mathbf{x})|^2 \sin 2\varphi(\xi, \mathbf{x}) d\xi}{B(\xi)} \quad (50)$$

であり、これらはシステム関数  $T(\xi, \mathbf{x})$  によってのみ決まるので光学配置に依存する。

以上のことから次のことが一般的に結論できる。散乱体を出射する光波の位相変動が大きく、 $\exp(-\sigma_\varphi^2) \approx 0$  であれば式(48)、(49)および式(45)–(47)から

$$\langle A_r \rangle = \langle A_i \rangle = 0 \quad (51)$$

$$\sigma_r^2 = \sigma_i^2 = \Delta S_\varphi B(\mathbf{x})/2 \quad (52)$$

$$\rho = 0 \quad (53)$$

となる。この場合の複素平面上の分布は、原点の周りで実数部と虚数部の分散が等しく、両者に相関がない平均値がゼロの円形対称分布である。ゼロ平均円形分布を与える位相変動の標準偏差  $\sigma_\varphi$  がどの程度の大きさかというところとそれほど大きなものではない。なぜなら、 $\sigma_\varphi \geq \pi$  であれば  $\exp(-\sigma_\varphi^2) < 0.00005$  であるから式(51)–(53)は非常に良い近似で成り立つ。すなわち、光波の半波長程度以上の波面の乱れが散乱直後で生じていると十分ゼロ平均の円形対称な分布になる。

次の結論も重要である。ゼロ平均円形分布は、システム関数  $T(\xi, \mathbf{x})$  に無関係に得られる。このことは照明条件、伝搬系、検出条件にかかわらず、どのような光学配置においても位相の標準偏差  $\sigma_\varphi$  が  $\pi$  程度以上であればゼロ平均の円形分布になることを意味している。また、同時に、観測するスペックル場がいかなる統計に従うかにも関係しない。

### 3. ガウシャン・スペックルの特性

#### 3.1 確率密度関数と等確率密度楕円

ここまでは、散乱体から出射する光波の位相がガウス統計に従う条件のみを課し、観測されるスペックル場の複素振幅が従う統計には何ら制限を与えずに議論を進めてきた。しかし、さらに議論を展開するためには、スペックル場の複素振幅が従う統計を特定する必要がある。幸い、通常のスペックルは多くの場合において数多くの散乱要素から位相の異なる光波が出射し、伝搬光学系を経て重なり合う干渉現象をによって生じる。このため重ね合わさった光波の複素振幅に対して良く知られた中心極限定理が適用できる<sup>8)</sup>。すなわち、この定理の保障のもとに、



多くの要素波の重ね合せによる結果としてスペックル複素振幅はガウス統計に従う。このようなスペックルをガウシヤンスペックル<sup>2)</sup>という。

一方、散乱体のごく一部の領域だけが照射されたとき、回折界のスペックルは、その形成において寄与するランダム位相を持つ要素波の数が非常に少ない場合がある。このような場合には中心極限定理が適用できない。その結果、スペックル場がガウス統計にしたがう根拠はなく、非ガウシヤンスペックルとして別の数学的取り扱いが必要とされる。以下、本稿では、ガウシヤンスペックルに議論を限って展開することにする。

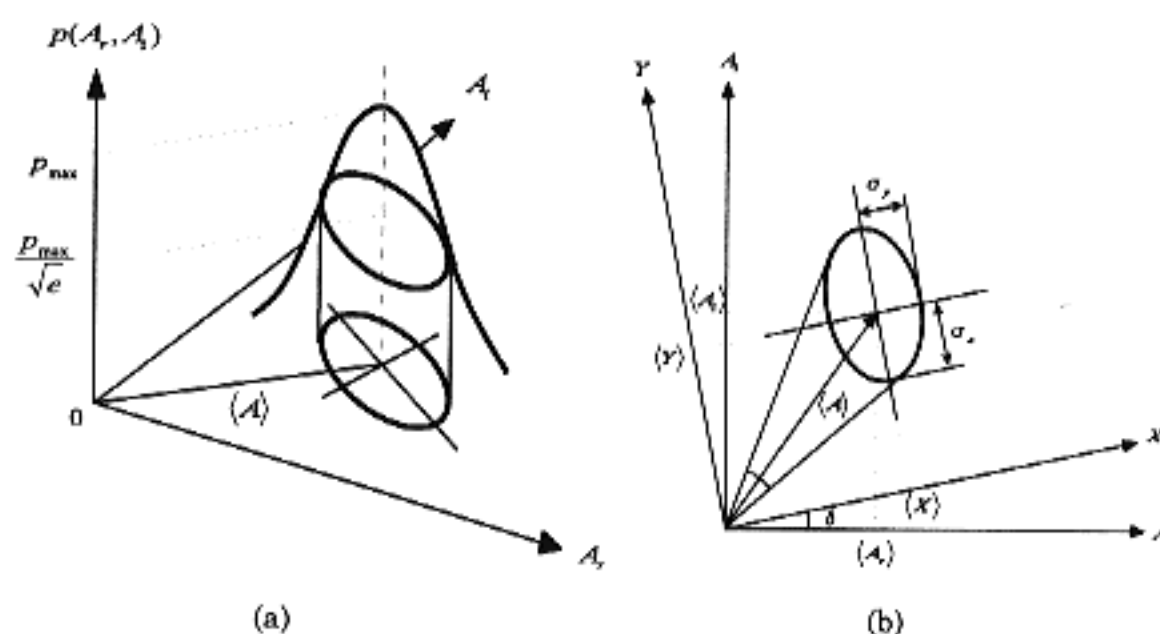


Fig. 3 確率密度関数 (a) と等確率密度楕円(b)

ガウシヤンスペックルに対しては、スペックル複素振幅の実数部 $A_r$ と虚数部 $A_i$ の結合確率密度関数は

$$p_{r,i}(A_r, A_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{\Delta A_r^2}{\sigma_r^2} - \frac{2\rho\Delta A_r\Delta A_i}{\sigma_r\sigma_i} + \frac{\Delta A_i^2}{\sigma_i^2} \right]\right\} \quad (54)$$

で与えられる。ここで、 $\Delta A_r = A_r - \langle A_r \rangle$ 、 $\Delta A_i = A_i - \langle A_i \rangle$ である。式(54)の密度関数は前章で述べた5つの統計量 $\langle A_r \rangle$ 、 $\langle A_i \rangle$ 、 $\sigma_r$ 、 $\sigma_i$ 、 $\rho$ によって完全に決まる。式(48)の確率密度関数は、Fig. 3(a)に示すような $A_r - A_i$ 平面上の2次元ガウス関数であって、平均値が $(\langle A_r \rangle, \langle A_i \rangle)$ で最大確率 $p_{\max} = [2\pi\sigma_r\sigma_i(1-\rho^2)^{1/2}]^{-1}$ をとり、その点のまわりで中心対称な関数である。いま、この関数が $p_{\max}/\sqrt{e}$ の値をとる点を連ねた等確率線を $A_r - A_i$ 平面に射影すると Fig. 3(b)に示される等確率密度楕円が得られる。この等確率密度楕円は式(54)を与える5つのパラメータで同様に決まることから、楕円の複素平面上の振る舞いを調べることによってガウシヤンスペックルの統計的な性質を詳細に知ることができる。

一般に等確率密度楕円の主軸は $A_r$ 軸に対して傾いている。しかし、スペックル強度が原点か

らの距離に関係し、位相が原点から張る楕円の広がり角に関係することから原点を中心とする座標回転によって一般性は失われない。そこで、楕円の2つの主軸に平行で、原点Oを通る座標系 $X-Y$ に変換すると等確率楕円を標準化することができる。このとき、 $(A_r, A_i)$ 座標系における点は $X-Y$ 座標系の点 $(X, Y)$ へ

$$X = A_r \cos \delta + A_i \sin \delta, \quad Y = -A_r \sin \delta + A_i \cos \delta \quad (55)$$

の関係で変換される。回転角 $\delta$ は楕円のパラメータと

$$\tan 2\delta = 2\rho\sigma_r\sigma_i / (\sigma_r^2 - \sigma_i^2) \quad (56)$$

の関係にある。式(56)の右辺に式(45)-(47)を用いると

$$\tan 2\delta = S(\mathbf{x})/C(\mathbf{x}) \quad (57)$$

であり、標準化に伴う座標回転角は散乱体を出射する光波の位相変動には無関係で、用いる光学系にのみ関係することがわかる。

標準化された確率密度関数は

$$p_{r,i}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\left[\frac{(X-\langle X \rangle)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(Y-\langle Y \rangle)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \quad (58)$$

となる。ここで、 $\sigma_x, \sigma_y$ は $X-Y$ 座標系における各々の方向に関する標準偏差で楕円の2つの半径にほかならない。これらは、 $\sigma_r, \sigma_i$ とつぎの関係にある。

$$\sigma_x^2 = (\sigma_r^2 \cos^2 \delta - \sigma_i^2 \sin^2 \delta) / \cos 2\delta \quad (59)$$

$$\sigma_y^2 = (\sigma_i^2 \cos^2 \delta - \sigma_r^2 \sin^2 \delta) / \cos 2\delta \quad (60)$$

また、平均値は

$$\langle X \rangle = \langle A_r \rangle \cos \delta + \langle A_i \rangle \sin \delta \quad (61)$$

$$\langle Y \rangle = \langle A_r \rangle \sin \delta + \langle A_i \rangle \cos \delta \quad (62)$$

である。

### 3.2 フラウンホーファ回折のスペckル

ここまでは、任意の線形光学系におけるガウシヤンスペckルに関して論じてきた。ガウシヤンスペckルを完全に記述するためには、スペckル複素振幅の実数部と虚数部の平均値 $\langle A_r \rangle, \langle A_i \rangle$ 、分散 $\sigma_r^2, \sigma_i^2$ 、相関係数 $\rho$ の5つの統計量が必要である。ここでは、フラウンホーファ回折領域に形成されるスペckルに関してこれらの統計量を求める。

2.3 で述べたように、等確率密度楕円を決める 5 つの統計量は式(4)で定義されるシステム関数  $T(\xi, \mathbf{x})$  に関係している。いま、Fig. 2 で観測面をフラウンホーファ回折面とし、照明光の振幅分布  $E(\xi)$  が有限な開口  $\Sigma$  の内部で一様であるとする、

$$E(\xi) = \begin{cases} \sqrt{I_0} & (\text{開口内部}) \\ 0 & (\text{開口外部}) \end{cases} \quad (63)$$

とかける。また、フラウンホーファ回折の伝搬関数は

$$K(\xi, \mathbf{x}) = \frac{i}{\lambda z} \exp\left(i \frac{2\pi \xi \mathbf{x}}{\lambda z}\right) \quad (64)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda$  は照射光の波長、 $z$  は光源面から観測面までの距離である。したがって、式(4)は開口  $\Sigma$  の内部において

$$T(\xi, \mathbf{x}) = \left( i \sqrt{I_0} / \lambda z \right) \exp(i\varphi), \quad \varphi = \frac{2\pi \xi \mathbf{x}}{\lambda z} \quad (65)$$

である。これを用いると、式(40)、(41)の平均値は

$$\langle A_r \rangle = \left( \sqrt{I_0} / \lambda z \right) \exp(-\sigma_\xi^2 / 2) \int_{\Sigma} \cos\left(\frac{2\pi \xi \mathbf{x}}{\lambda z}\right) d\xi \quad (66)$$

$$\langle A_i \rangle = \left( \sqrt{I_0} / \lambda z \right) \exp(-\sigma_\xi^2 / 2) \int_{\Sigma} \sin\left(\frac{2\pi \xi \mathbf{x}}{\lambda z}\right) d\xi \quad (67)$$

となる。また、式(48)–(50)は、光源の開口面積を  $S_\Sigma$  として

$$B(\mathbf{x}) = (I_0 / \lambda^2 z^2) S_\Sigma \quad (68)$$

$$C(\mathbf{x}) = S_\Sigma^{-1} \int_{\Sigma} \cos\left(\frac{4\pi \xi \mathbf{x}}{\lambda z}\right) d\xi \quad (69)$$

$$S(\mathbf{x}) = S_\Sigma^{-1} \int_{\Sigma} \sin\left(\frac{4\pi \xi \mathbf{x}}{\lambda z}\right) d\xi \quad (70)$$

となる。

### 3.3 方形光源の場合

式(66)、(67)、(69)、(70)は観測面上の座標  $\mathbf{x}$  に依存する。すなわち、一般にはスペックルの統計は観測点に依存し、その関係は、光源の開口  $\Sigma$  が与えられると決まる。そこで光源の開口  $\Sigma$  が一辺が  $a$  の方形である場合を考えると、

$$C(\mathbf{x}) = S_{\Sigma}^{-1} \int_{\Sigma} \cos\left(\frac{4\pi\xi\mathbf{x}}{\lambda z}\right) d\xi = \frac{\sin\left(\frac{\pi a x}{\lambda z}\right) \sin\left(\frac{\pi a y}{\lambda z}\right)}{\left(\frac{\pi a x}{\lambda z}\right) \left(\frac{\pi a y}{\lambda z}\right)} \quad (71)$$

$$S(\mathbf{x}) = S_{\Sigma}^{-1} \int_{\Sigma} \sin\left(\frac{4\pi\xi\mathbf{x}}{\lambda z}\right) d\xi = 0 \quad (72)$$

である。以下では、光源に位相ゆらぎがないときに回折光が最大強度になる原点  $\mathbf{x}=0$  と第一暗線位置での散乱光の等確率密度楕円を示す。

### (1) 原点 $\mathbf{x}=0$ での等確率密度楕円

観測位置が原点  $\mathbf{x}=0$  であるときの等確率密度楕円の振る舞いを調べてみよう。このとき、 $C(0)=1$  であるので、式(66)、(67)の平均値  $\langle A_r \rangle$ 、 $\langle A_i \rangle$  および式(45)–(47)で与えられる標準偏差  $\sigma_r$ 、 $\sigma_i$  と相関係数  $\rho$  は

$$\langle A_r \rangle = A_0 \sigma_{\omega} (-\sigma_{\phi}^2/2) \quad (73)$$

$$\langle A_i \rangle = 0 \quad (74)$$

$$\sigma_r = \sigma_{\omega} [1 - \exp(-\sigma_{\phi}^2)] \quad (75)$$

$$\sigma_i = \sigma_{\omega} [1 - \exp(-2\sigma_{\phi}^2)]^{1/2} \quad (76)$$

$$\rho = 0 \quad (77)$$

となる。ここで

$$A_0 = \frac{\sqrt{I_0} S_{\Sigma}}{\lambda z} \quad (78)$$

である。また、 $\sigma_{\omega}$  は式(45)あるいは式(46)で  $\sigma_{\phi} \rightarrow \infty$  のときの  $\sigma_r$  (あるいは  $\sigma_i$ ) であり式(68)を用いて

$$\sigma_{\omega} = \frac{\Delta S_{\phi} B(\mathbf{x})}{2} = \frac{\Delta S_{\phi} A_0^2}{2 S_{\Sigma}} \quad (79)$$

である。

Fig. 4 は、式(75)、(76)を用いて、散乱体を出射する光波に関する位相の標準偏差  $\sigma_{\phi}$  の関数としてスペックル場における複素振幅の実数部と虚数部の標準偏差  $\sigma_r$ 、 $\sigma_i$  を比較したものである。この結果から、 $\sigma_i$  は  $\sigma_{\phi}$  の小さな値の領域で  $\sigma_r$  より大きな値をとるが、およそ  $\sigma_{\phi} > 3\pi/4$  では両者の値が等しくなることが分かる。すなわち、フラウンホーファ回折領域においてガウシヤンスペックルの複素平面上の等確率密度楕円は、位相変動が小さいときには虚軸方向の広がりを実軸方向の広がりよりも大きい非円形であり、位相変動が大きくなるにつれて円形に近づくことを意味している。

Fig. 5 は、 $A_0=5$  とし  $\sigma_{\phi} = \pi, \pi/3, \pi/6$  と変えたときに式(73)–(77)より得られた等確率密度楕円の振る舞いである。これに見られるように、等確率密度楕円は  $\sigma_{\phi}$  が増加すると円形の形状に近づくと共にその中心は原点  $O$  に近づいていく。

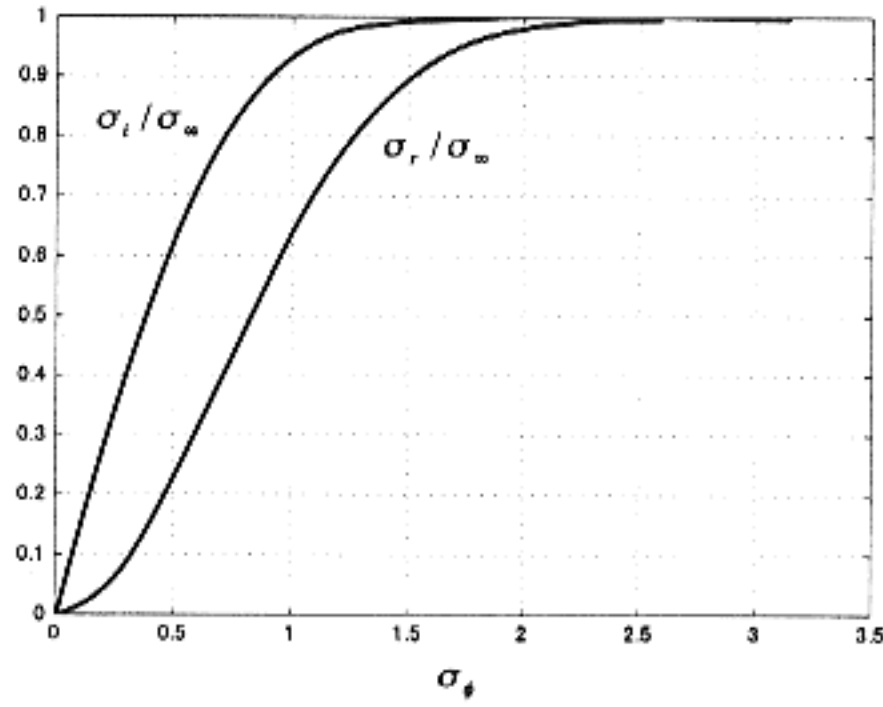


Fig. 4  $x=0$ における $\sigma_p$ の関数としての $\sigma_r/\sigma_m$ と $\sigma_t/\sigma_m$

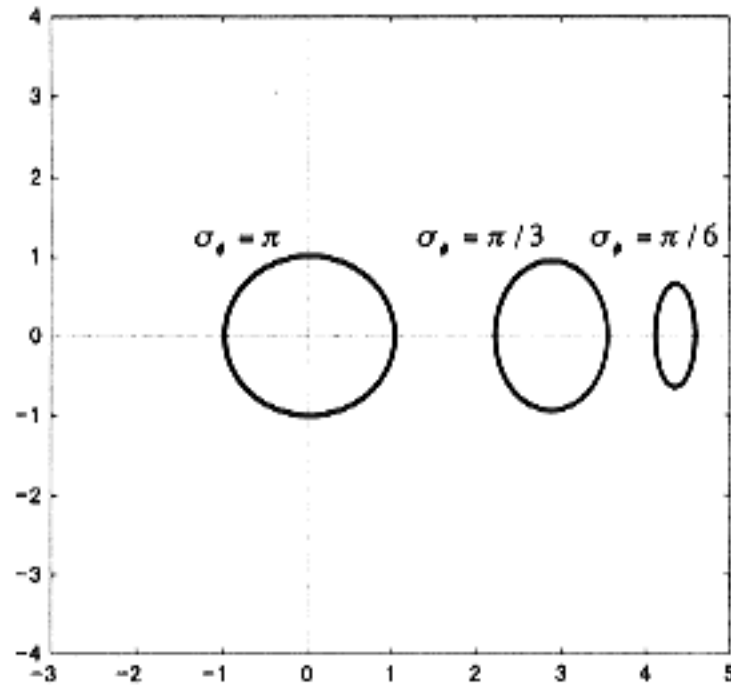


Fig. 5  $x=0$ における $\sigma_p = \pi, \pi/3, \pi/6$ に対する等確率密度楕円の振る舞い

(2) 第一暗線位置 $x = \pi\lambda/a$ での等確率密度楕円

光源に位相変動がないときには、光源の回折パターンは $x = \pi\lambda/a$  (あるいは、 $y = \pi\lambda/a$ ) で暗線になる。すなわち、最大強度の原点から強度が減少し最初にゼロになる位置である。この位置では式(1)はゼロであるので、等確率密度楕円を与える5つのパラメータは

$$\langle A_r \rangle = \langle A_i \rangle = \rho = 0 \quad (80)$$

$$\sigma_r = \sigma_i = \sigma_\infty [1 - \exp(-\sigma_\phi^2)]^{1/2} \quad (81)$$

となる。このように、 $x = \pi\lambda/a$ で観測される回折界スペックルの等確率密度楕円は、位相の標準偏差 $\sigma_\phi$ に依らずに平均値ゼロを中心とする円形形状であり、 $\sigma_\phi$ が増大するとその分布の半径 $\sigma_r$ （あるいは、 $\sigma_i$ ）は大きくなる。

Fig. 6は、散乱体の位相の標準偏差 $\sigma_\phi$ の関数として楕円の半径 $\sigma_r$ を求めた結果である。これから分かるように、この場合もおよそ $\sigma_\phi = \pi, 3\pi/4$ で $\sigma_r/\sigma_\infty \approx 1$ であって円形分布の半径は $\sigma_\infty$ に飽和する。Fig. 7は、 $\sigma_\phi = \pi, \pi/3, \pi/6$ と変えたときの等確率密度楕円の振る舞いである。 $\sigma_\phi \rightarrow 0$ で楕円の半径はゼロに漸近するが、これは位相のゆらぎがゼロのときには $x = \lambda\pi/a$ の点が暗線の位置であることに依っている。

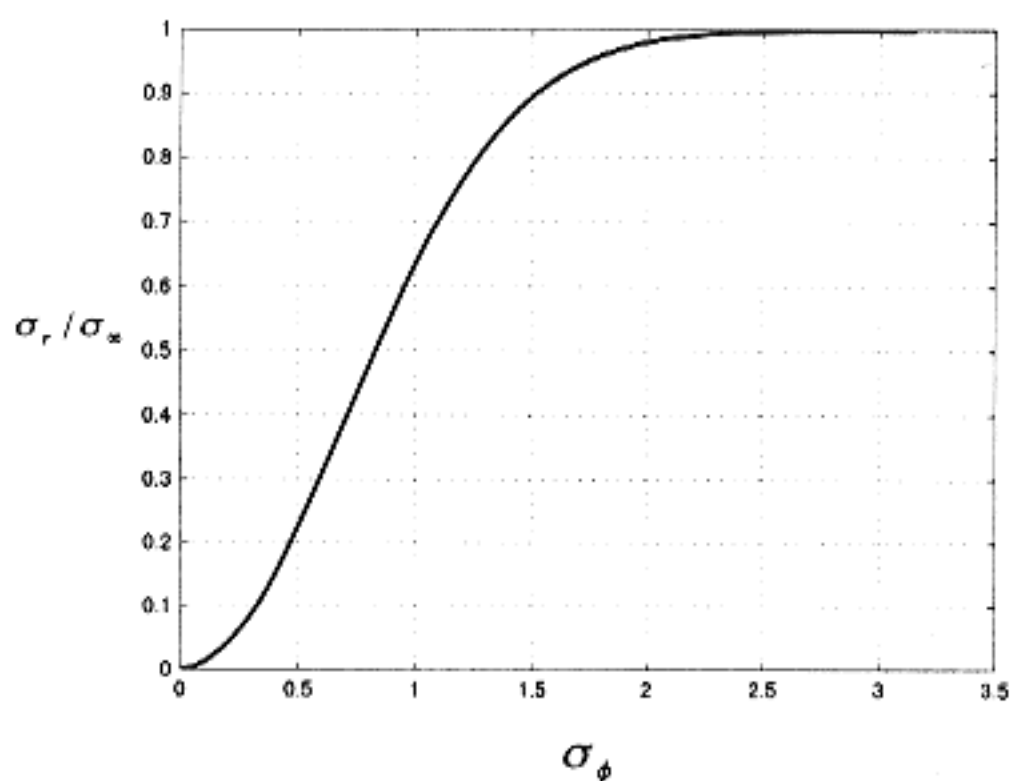


Fig. 6  $x = \pi\lambda/a$ における $\sigma_\phi$ を変えたときの円形分布半径 $\sigma_r/\sigma_\infty$

Fig. 5とFig. 7の等確率密度楕円の振る舞いは大きく異なっている。しかし、いずれの場合も $\sigma_\phi$ の値が大きいときには $\sigma_\infty$ の半径の円形分布になる。このことは、位相変動が大きくなると回折界のスペックル場は統計的に一様な特性になることを示している。

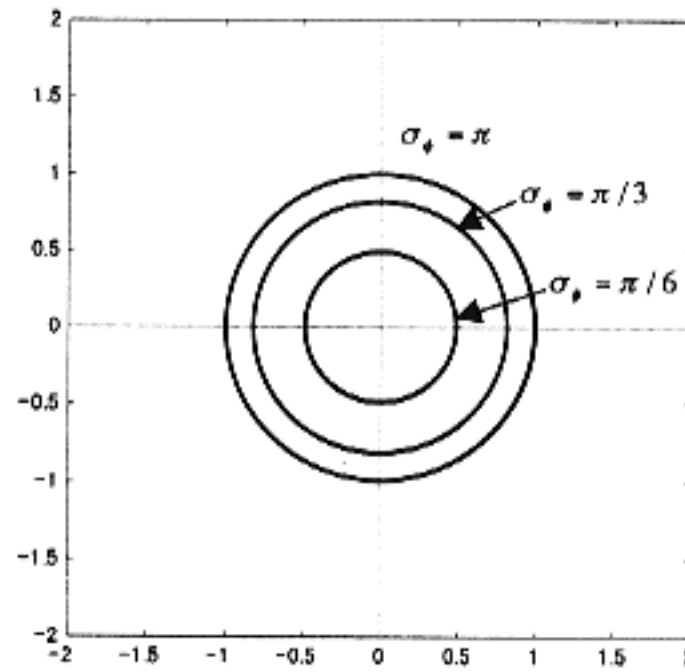


Fig. 7  $x = \pi\lambda/a$ における  $\sigma_\phi = \pi, \pi/3, \pi/6$  に対する等確率密度楕円の振る舞い

#### 4. おわりに

本稿では、散乱体が空間的な位相変動を持つ場合に、ガウス統計に従うスペックルの特性を複素振幅に関する等確率密度楕円を用いて理論的に解析した。これによってスペックル場の強度と位相の統計的な振る舞いが同時に明らかになった。結果として、等確率密度楕円はそれを記述する5つのパラメータ、すなわち複素振幅の実数部と虚数部の平均値  $\langle A_r \rangle, \langle A_i \rangle$  と各々の標準偏差  $\sigma_r, \sigma_i$ 、および両者の間の相関係数  $\rho$  によって記述され、一般的な表式として式(40), (41) および式(45)~(47)が得られた。

さらに、ここでの結果をフラウンホーファ回折領域に形成されるスペックル場に適用し、位相変動が小さいときには、スペックル場の統計的な特性は光源の開口関数  $\Sigma$  および観測面の空間座標に依存することを示した。また同時に、位相変動が大きくなると空間的に定常なスペックル場が形成されることを定量的に明らかにした。

本研究は、北海学園大学ハイテクリサーチセンターの研究プロジェクト「知的画像・言語情報処理システムにおける情報統合処理技術の研究開発」の一環として行った。

## 参 考 文 献

- 1) J.W. Goodman: *Opt. Commun.* Vol. 14, p. 324 (1975).
- 2) 朝倉利光, 高井信勝: *光工学ハンドブック* p.195-214 (朝倉書店, 1986).
- 3) J. Uozumi and T. Asakura: *Appl. Opt.*, Vol. 20, p. 1454 (1981).
- 4) N. Takai, H. Kadono and T. Asakura: *SPIE Proceedings*, No. 102, p. 834 (1985).
- 5) H. Kadono, N. Takai and T. Asakura: *Opt. Acta*, Vol. 12, p. 1223 (1985).
- 6) N. Takai, H. Kadono and T. Asakura: *Optical Engineering*, Vol. 25, p. 627 (1986).
- 7) H. Kadono, N. Takai and T. Asakura: *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 3, p. 1080 (1986).
- 8) J.W. Goodman: *Statistical Optics*, p. 33 (John Wiley & Sons, New York, 1984).