

光散乱場における位相渦の発生メカニズム

高井 信勝*・高 義礼**

Phase Vortices in the Scattered Field of Light

Nobukatsu TAKAI* and Yoshinori TAKA**

Abstract

Phase vortices produced in the scattered field of Fraunhofer diffraction are investigated by means of a computer simulation using a language of MATLAB. Interference fringe patterns with π separation are employed to display them with high contrast. The simulation study and the theoretical analysis of fringes give us valuable knowledge with respect to generation of phase vortices in the scattered field.

1. はじめに

光計測では、対象物体に光を照射しその散乱光を検出して物体の情報を得る。物体情報は、構成物質の原子・分子の物性的な挙動、物体表面の反射率や表面構造、あるいは物体の変位・変形や振動状態など多岐にわたる。このとき、照射光としてコヒーレントな光を用いると、電波やマイクロ波と同様に光の振幅、周波数、位相に物体情報を託すことができるが、照射光と散乱波の周波数が同じときには、物体情報は光の振幅と位相に反映される。そのとき、光の振幅情報は、光強度を検出することで得られるが、そのままでは位相情報は失われる。そのため位相情報を得るためには物体からの散乱波に既知の参照波を重ねる干渉技術が用いられる。つ

* 北海学園大学工学部電子情報工学科

Department of Electronics and Information Science, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

** 北海学園大学工学部ハイテクリサーチセンター

High-tech Research Center, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

まり、位相情報は干渉縞の形で得られる。

レンズや非球面などの形状測定で得られる干渉縞の等位相線は、通常、Fig. 1に示すような山岳地形の等高線のように分岐のないループの集合として観測される。一方、ホログラフィ干渉やスペckル干渉で利用される散乱場の干渉縞には、これとは異なって、分岐や終端をもつ等位相線が現れ、これが位相の渦構造によることが知られている^{1)~4)}。Fig. 2は、この研究で得られた散乱場の干渉パターンのひとつで白い輪で囲む箇所に多くの位相の特異点が認められる。ここで位相の特異点とは位相渦の生じるところを言う。この研究では、このような位相渦の発生メカニズムを科学技術計算言語 MATLAB を用いた計算機シミュレーションによって調べた。

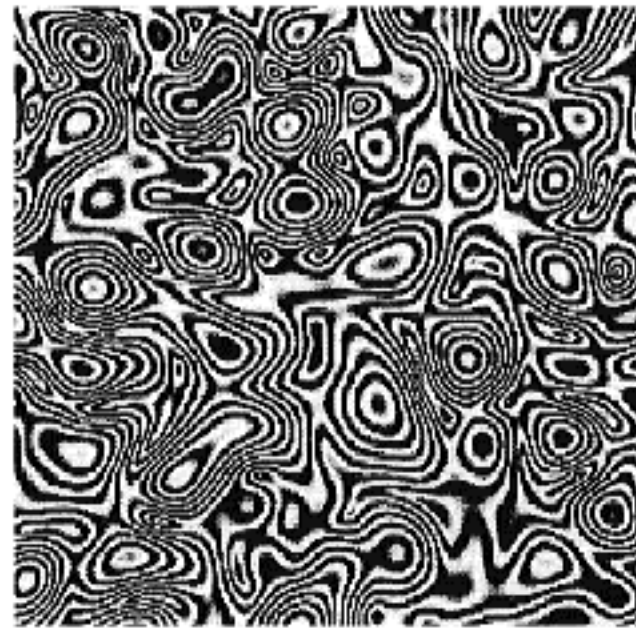


Fig. 1 分岐のない通常の干渉縞

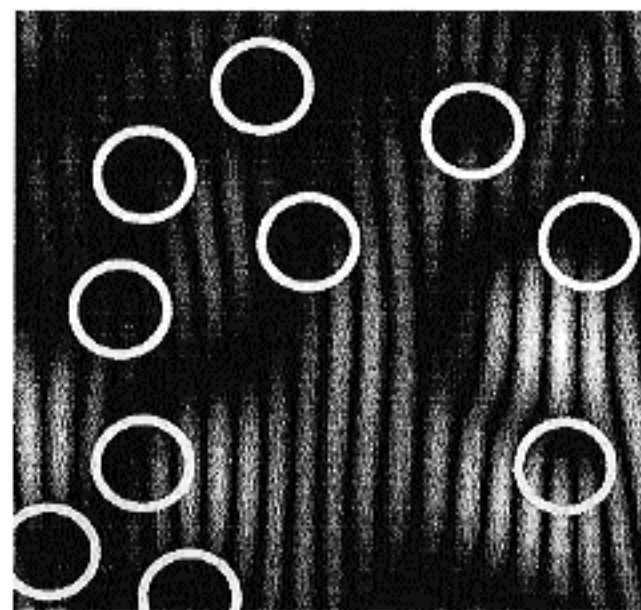


Fig. 2 光散乱場の干渉縞

2. シミュレーションの手法

シミュレーションの解析手順の概要を Fig. 3 に示す。これに示すように、散乱体を各点から位相の異なる光を出射する光源とみなし、それを 2 次元の有限配列 (7×7) からなる散乱体セルモデルとした。多くの場合、散乱波の検出はフラウンホーファ回折領域で行われるので光源の 2 次元フーリエ変換を用いると散乱場の複素振幅を得ることができる。そこで、おのおのの光源要素から出る光波の位相をガウス乱数で与え、その標準偏差値を変えて散乱場をもとめ、それに一定のティルト (傾き) をもつ参照平面波を重ねた干渉強度の干渉縞を調べた。

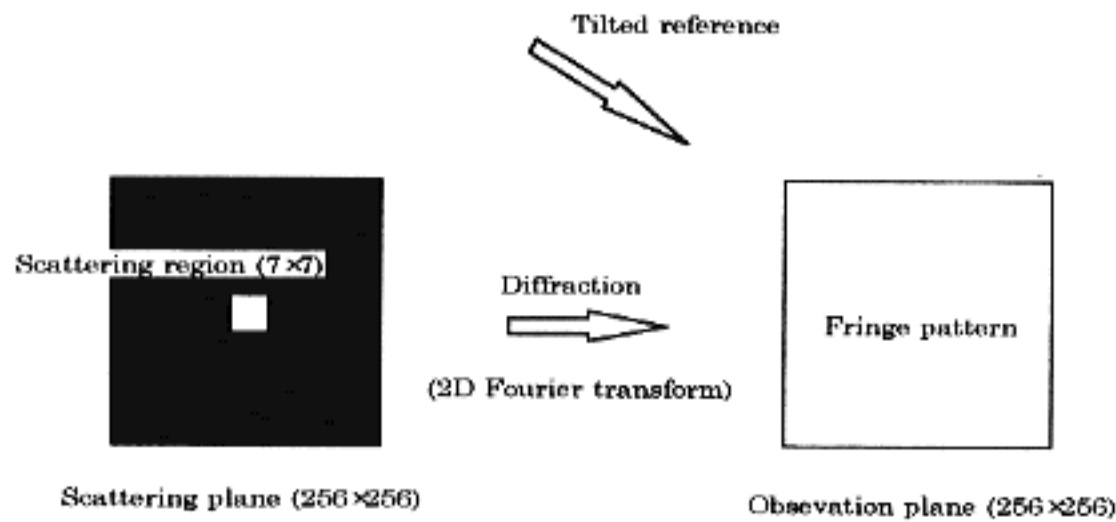


Fig. 3 シミュレーションの解析手順の概要

このシミュレーションを実行する MATLAB プログラムのリストの一例を下に示す。これは、後述の Fig. 7 および Fig. 8 の結果を得るプログラムである。

[プログラムリスト]

```
% Ex_vortex.m
```

```
clear; close all
```

```
N=256;
```

```
%array size
```

```
NR=7;
```

```
%source size
```

```
sd=0.1;
```

```
%standard deviation of phase
```

```
Rand_phase=sd*pi*randn(NR);
```

```
% random phase
```

```
R=1*exp(i*Rand_phase);
```

```
% scattered wave
```

```

X=zeros(N); % source plane array
Ns=N/2-(NR-1)/2+1; Ne=Ns+NR-1;
X(Ns:Ne, Ns:Ne)=R;
Y=fft2(X); Y=fftshift(Y); % 1 Fourier-transformed amplitude
powerY=Y.*conj(Y); % diffraction pattern
powerY2=powerY;
powerY2(1,1)=powerY2(1,1)-max(powerY2(:))/5; %% operation for display
L=N/10; % tilt parameter
Plane_phase=zeros(N); % reference phase
for x=1: N; Plane_phase(:,x)=2*pi*x./L; end
fac=sqrt(max(powerY(:)));
A=1*Y+fac*exp(i*phase2); % 2 interference amplitude
Fringe=A.*conj(A); % 3 fringe intensity
Fringe=Fringe-1*powerY-fac^2; % removing of dc components
Fringe=abs(Fringe); % absolute value of fringe
Fringe(1,1)=Fringe(1,1)-max(Fringe(:))/5; %% operation for display
subplot(1,2,1) % display of diffraction pattern
imagesc(powerY2); axis square; colormap(gray); axis off
subplot(1,2,2) % display of fringe pattern
imagesc(Fringe); axis square; colormap(gray); axis off
title(sprintf(' SD=%5.3f*pi',sd))

```

ここで、変数 X が散乱面の光源の 2 次元配列であって、% 1 の行のフーリエ変換により回折界の振幅を得ている。また、参照波との干渉は % 2 行によって得られる。その強度データの絶対値を % 3 行で求め、最終的に結果が 2 次元パターンとして表示される。また、%% 行では、表示結果のパターンの輝度を調節するためにバイアスが加える操作である。

なお、干渉縞の表示に関しては、以下の理論解析のあとで述べる。

3. 干渉縞の表式

計算機シミュレーションは、Fig. 3 に示す手順で行った。まず、ここで得られる干渉縞に対する理論的な表式を与えておく。

光源の振幅分布を、 $s_0(\xi, \eta)$ 、位相分布を $\phi(\xi, \eta)$ とすると、フラウンフォーファ回折領域にお

ける散乱場の複素振幅は

$$S(x, y) = \iint s_0(\xi, \eta) \exp[i\phi(\xi, \eta)] \exp[-2\pi i(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta \quad (1)$$

と表される。ここで、 p 、 q は換算座標で散乱光の波長を λ 、観測面までの距離を z とすると、

$$p = \frac{x}{\lambda z}, \quad q = \frac{y}{\lambda z} \quad (2)$$

である。いま、 $\exp[i\phi(\xi, \eta)]$ を展開することによって式(1)は

$$S(x, y) = \iint s_0(\xi, \eta) \exp[-2\pi i(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta + \iint \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} \right] s_0(\xi, \eta) \exp[-2\pi i(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta \quad (3)$$

と表される。この右辺第1項は、位相変動 $\phi(\xi, \eta)$ がゼロのときに得られる回折界の振幅分布であって位相変動が小さいときにはこの項が支配的である。しかし、 ϕ が増大するにつれて第2項目の比重が増しランダムな散乱場が形成されることができると考えることができる。つまり、散乱場は位相変動がないときの場にランダムな場が摂動として加わったものと考えられる。なお、式(3)の第1項は位相変動がない場合であるので、一辺が a の正方形の光源に対して

$$S(x, y)|_{\phi=0} = a^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi ax}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi ax}{\lambda z}} \frac{\sin\left(\frac{\pi ay}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi ay}{\lambda z}} \quad (4)$$

である。

次に、式(3)の散乱場に参照平面波

$$R(x) = r \exp(-2\pi ix/L) \quad (5)$$

を重ねた干渉強度は、

$$I(x, y) = |S(x, y) + R(x)|^2 = |S(x, y)|^2 + r^2 + 2r|S(x, y)| \cos[2\pi x/L - \phi_s(x, y)] \quad (6)$$

となる。ここで、 $\phi_s(x, y)$ は散乱場 $S(x, y)$ の位相分布であり、 L は参照平面波の波面のティルト（傾き）を与える定数である。

4. 干渉縞の表示法

理論式(6)に基づいて干渉縞を表示するための二つの方法を述べる。式(6)の右辺第3項目が干渉項であるので、第1、第2の項を差し引いて干渉縞を得ることができる。すなわち、

$$J(x,y) = I(x,y) - |S(x,y)|^2 - r^2 = 2r|S(x,y)|\cos[2\pi x/L - \phi_s(x,y)] \quad (7)$$

を表示すると、散乱場の振幅 $|S(x,y)|$ の重畳した干渉縞を得ることができる。

このとき、散乱場の干渉縞を通常のように位相差が 2π ごとに \cos 項が極大になる点を明るく、極小になる点を暗く表示すると振幅 $|S(x,y)|$ の影響で非常にコントラストが低い表示になる。一方、式(7)の絶対値を表示すると、振幅 $|S(x,y)|$ に関わりなく、コントラストの良い干渉縞が得られる。このときには、干渉縞の明線は位相差が π ごとに生じ、加えて振幅の明暗に重なって干渉縞が得られる。

Fig. 4 に、干渉縞が式(4)において $x=0$ で得られる包絡線（すなわち振幅分布）をもつときの二つの表示の違いを示す。Fig. 4 (a) は隣り合う干渉縞の位相差が 2π 、Fig. 4 (b) が π の場合である。図に見られるように、干渉縞の最小値を暗く (dark)、最大値を最も明るく (brightest) 表示するとき、 2π 間隔と π 間隔の干渉縞の表示を比較すると、後者は次の 2 点において優れている。

- ・干渉縞が散乱場の振幅分布に重なって表示されるとき、 2π 間隔の表示よりも π 間隔の表示の方が干渉縞のコントラストがよい。
- ・また、 2π 間隔の表示では、振幅分布がゼロの点は強度（明るさ）ゼロと表示されないが、 π 間隔の表示では、振幅分布のゼロの点が強度ゼロのままに表示できる。

このように、位相差が π の表示法では、干渉縞と散乱場の振幅分布を同時に表示できる。ただし、同じ条件下では干渉縞の間隔は前者と比べて $1/2$ になる。

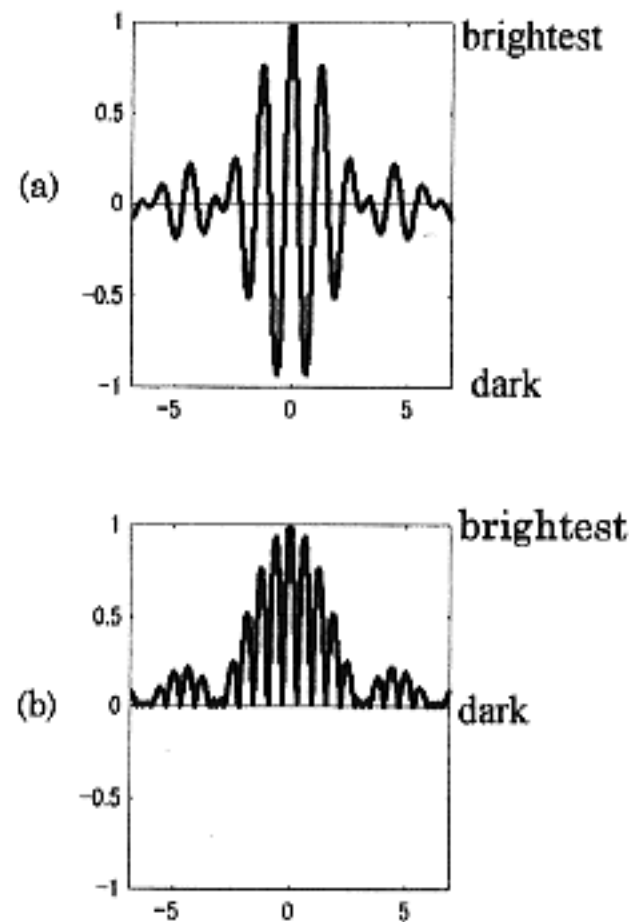


Fig. 4 隣り合う縞間の位相差が (a) 2π および (b) π の干渉縞

5. 位相渦の干渉縞

Fig. 5 は、理想的な位相渦を模式的に 3 次元表示したものである。これに見られるように位相の渦は、空間のある点（位相の特異点）の周りで位相が螺旋状に増加するもので、スローブを登るように 1 周したとき位相が 2π 増加する。この上り詰めたところは最初の点と物理的に同等

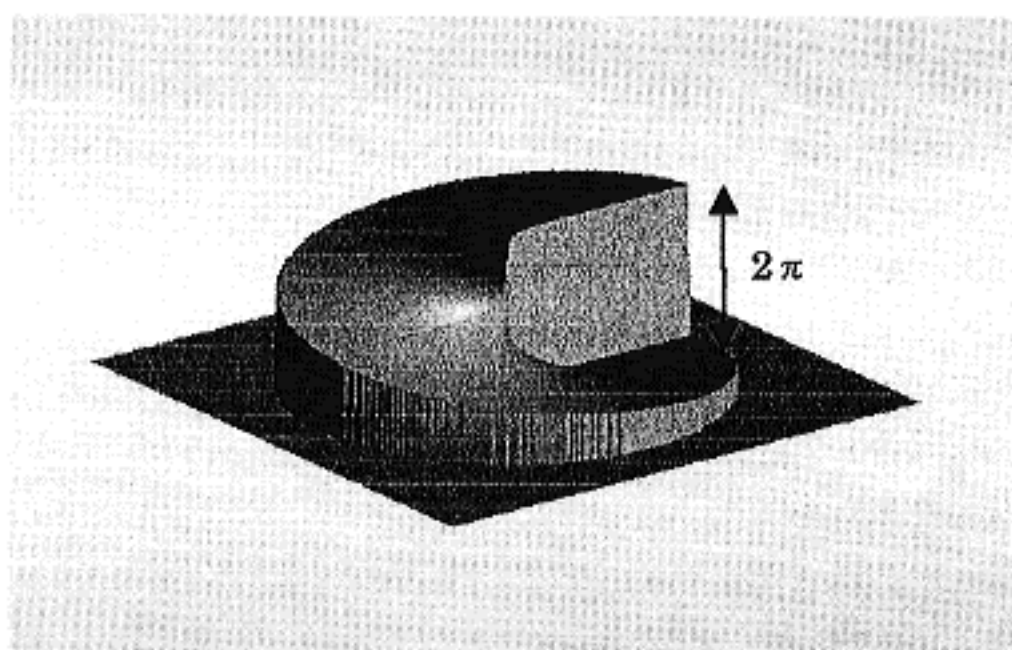
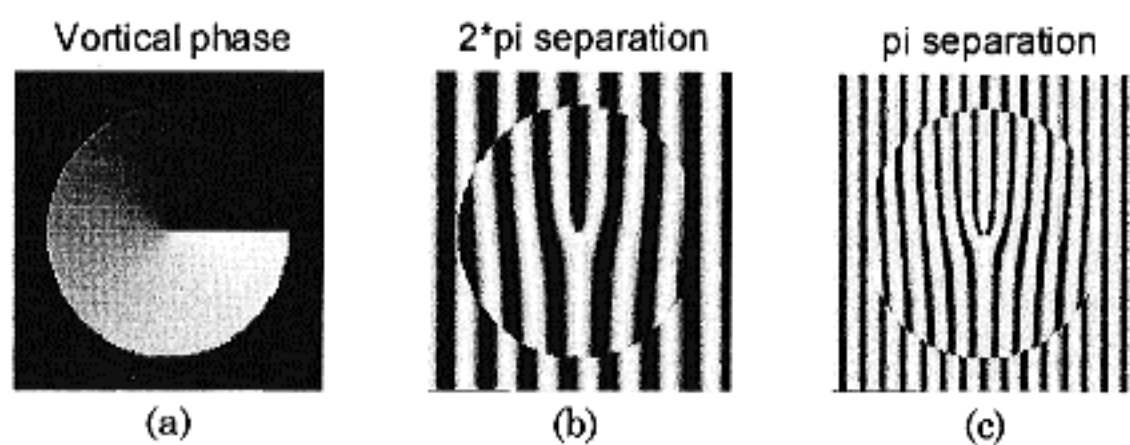


Fig. 5 位相渦の3次元表示

な状態にある。このように、位相渦が存在すると、同一点が周囲の場と位相差が0と 2π （あるいは、その整数倍）の2つの状態を併せ持つ特異な点になる。

Fig. 6は、位相渦に関して上述した二つの干渉縞の表示法を比較した結果である。Fig. 6 (a)は、空間のある点（位相の特異点）の周りで位相が渦を巻いてゼロ（黒い部分）から 2π （明るい部分）まで変化する様子を2次元的に明暗で示したものである。(b)、(c)は、それぞれ干渉縞を位相差 2π と π で表示した結果である。これに見られるように、位相の特異点の周りで枝分かれし、干渉縞は前者の表示ではY字型、後者では Ψ 字型の独特なパターンを示す。なお、Fig. 6では両方の表示とも良好なコントラストの干渉縞が得られている。これは、位相渦をもつ振幅が均一な平面波と参照平面波の干渉の結果に依っている。しかし、位相渦の振幅分布が均一でないときには、縞間隔が 2π の表示では干渉縞のコントラストは著しく低下する。

Fig. 6 位相渦の空間分布(a)と干渉縞。(b)は隣り合う縞の位相差が 2π , (c)は π

6. 散乱場の干渉縞

次に、縞間隔が π の表示のもとで得られた散乱場の干渉縞パターンを示す。Fig. 7は、光源における位相変動の標準偏差 σ_ϕ が小さい場合に得られた回折パターン（左図）と参照光を加えて得られた干渉縞のパターン（右図）である。この図において、上図が $\sigma_\phi=0.1\pi$ 、下図が $\sigma_\phi=0.2\pi$ の場合である。この場合には、光源の位相変動が小さいために式(3)の第1項が支配的で、式(4)で与えられる回折パターンに重なって干渉縞が得られる。そして、 $\sigma_\phi=0.1\pi$ の場合の干渉パターンには、Fig. 6(c)に見られるような位相渦に特有な干渉縞はほとんど見られない。しかし、 $\sigma_\phi=0.2\pi$ と位相変動が大きくなると、中心から離れたところに幾つかの位相渦が発生することが認められる。これらの多くは、回折パターンが暗線になる位置に発生している。

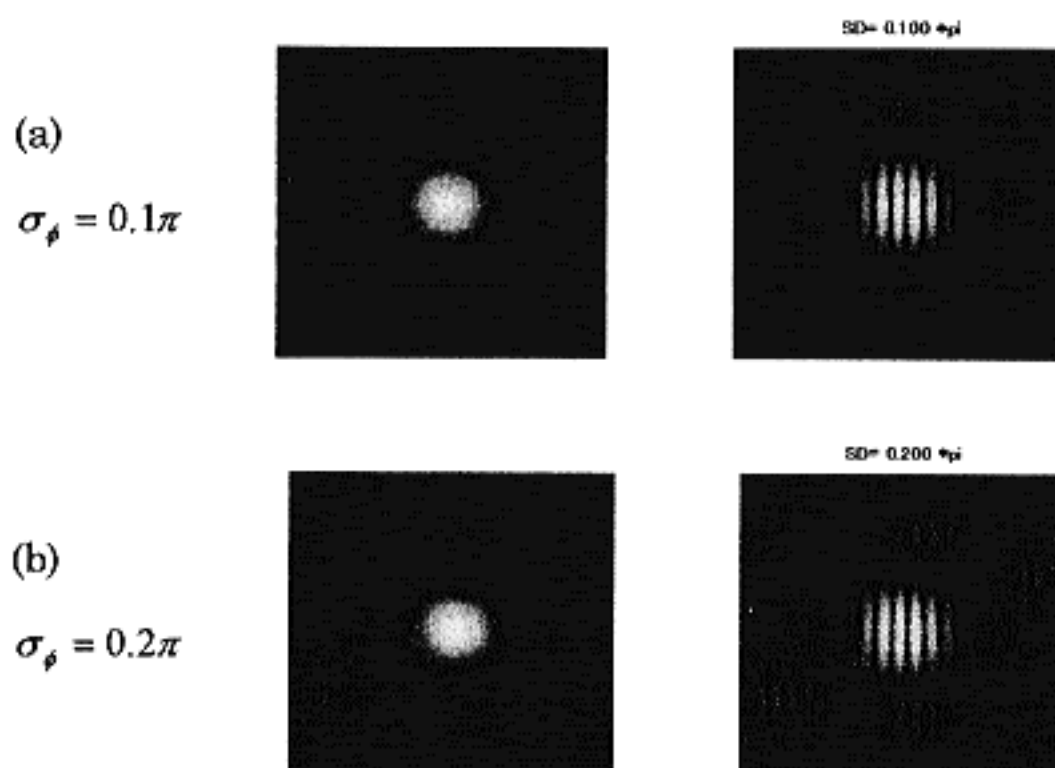


Fig. 7 散乱体の位相変動の標準偏差 σ_ϕ が小さい場合の回折パターン（左図）と干渉縞（右図）。(a): $\sigma_\phi=0.1\pi$, (b): $\sigma_\phi=0.2\pi$

Fig. 8は、位相変動の標準偏差が大きいたときの散乱場の回折パターンと干渉縞パターンで、(a)が $\sigma_\phi=\pi$ 、(b)が $\sigma_\phi=2\pi$ の結果である。この場合の干渉縞には、位相渦を示す Ψ 型の縞構造が数多く認められる。Fig. 8の回折パターン（左図）と干渉縞のパターン（右図）を見比べると、位相渦が生じる箇所は回折強度がゼロになる部分に限られていることがわかる。また、逆に非ゼロ強度の部分の干渉縞は、ほぼ直線的な並びをしている。これは、この領域で散乱光の位相がほぼ一定であることを示している。

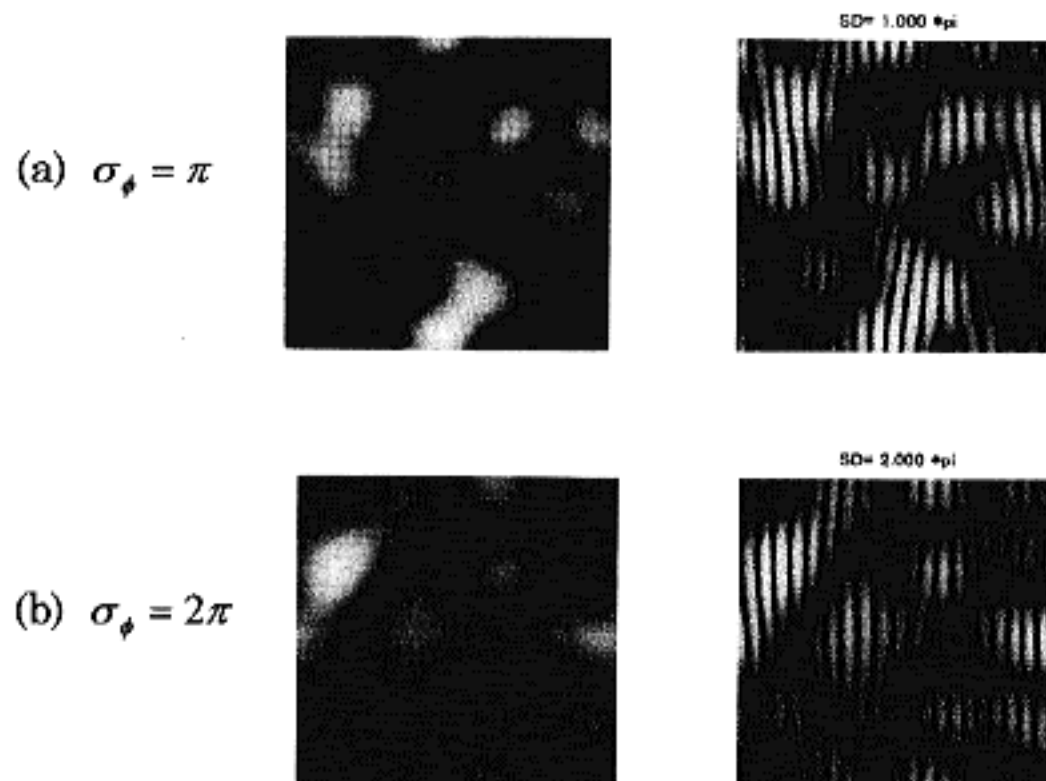


Fig. 8 散乱体の位相変動の標準偏差 σ_ϕ が大きい場合の回折パターン (左図) と干渉縞 (右図)。(a): $\sigma_\phi = \pi$, (b): $\sigma_\phi = 2\pi$

7. 位相渦発生の考察

位相渦が発生するメカニズムを考察するために、まず、位相変動がないときの回折パターンから調べる。この場合にシミュレーションによって得られた干渉縞のパターンが Fig. 9 である。このパターンの数式表現は、式(7)より

$$|J(x,y)|_{\phi=0} = 2r |S(x,y)|_{\phi=0} |\cos[2\pi x/L - \phi_s(x,y)]| \quad (8)$$

と与えられる。このように、位相変動がない場合には、式(4)で与えられる方形開口 (光源) の回折光振幅分布の絶対値 $|S(x,y)|_{\phi=0}$ に重畳する形で干渉縞が得られる。このことが、Fig. 9 のように x 軸 (横軸) に垂直方向の干渉縞が得られる理由である。

このとき、式(8)の位相 $\phi_s(x,y)$ に注意しなければならない。位相変動がないときに得られる式(4)の回折光振幅分布の中央部を占める主帯域 (main lobe) の領域で $\phi_s(x,y) = 0$ とすると、それに隣接する第1側帯域 (1st side lobe) では符号が反転しているため $\phi_s(x,y) = \pi$ である。つまり、主帯域と側帯域の間には位相のとび π が存在し、

$$x = m \frac{\pi z}{a}, \quad y = n \frac{\lambda z}{a} \quad (9)$$

で与えられる境界は強度ゼロの暗線である。ここで、 m, n はゼロを除く整数である。したがっ

て、Fig. 9においてa-A, b-Bの組み合わせが位相状態としては等価（位相差ゼロ）で、向かい合うa-B, b-Aの組み合わせの位相差は π である。

このような状態を初期状態として、位相変動が加わった場合を考える。つまり、式(3)の右辺の第2項が摂動として加わった効果である。この摂動が小さいときには、Fig. 9の回折パターンの構造をほとんど損なわずに暗線の部分に散乱光が現れる。その結果、主帯域と側帯域の領域が結合し、その間に干涉縞の接合がおきる。上で述べたように、主帯域と側帯域では逆位相であるので、通常はFig. 9に示すa-A, b-Bの干涉縞が接合する。この結果、そこでの干涉縞はS字形に曲がってつながる。この様子は、Fig. 7に見ることができる。

光源における位相変動が大きくなって、摂動の効果が大きくなると、隣接する干涉縞が足並みを揃えてS字形の形で接合するとは限らない。たとえば、主帯域のAの干涉縞が側帯域において、aで示される2つの干涉縞と接合することが起こりうる。そして、その間に挟まれたbの干涉縞はあたかも結晶格子面のディスロケーションのように孤立する。この様子は、Fig. 7(b)に見ることができる。これが、位相渦の干涉縞についてのひとつの説明である。しかし、主帯域と側帯域の間に大きな摂動が加わることによって、時には、Fig. 5に類似する位相渦が生じることが前提になる。あくまでも、位相渦が生じた結果としてそれに特有な干涉縞が現れると考えなければならない。

つぎに重要なことは、位相渦が暗線すなわち強度がゼロの周りに生じることである。これは、位相変動が大きい場合にも同様で、Fig. 8の二つの結果にも見ることができる。このことを解釈するために、散乱光の複素振幅に関する複素平面上の確率密度分布を考える。

いま、回折界の散乱光複素振幅 $A = A_r + iA_i$ が複素ガウス統計従う場合、その実部 A_r と虚部 A_i を座標軸にとった平面上で確率変数 A は Fig. 10 に示すように有限な領域で分布することが知られている³¹⁻⁷⁾。ここで、Fig. 10 (a) は位相変動が小さいときの分布で、この分布の平均値は原点 O から離れたところにある。散乱光の位相は図に示す θ であるので、この場合では $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ の範囲に限定される。

いま、散乱場のある点での複素振幅が、Fig. 10 (a) の原点から引かれたベクトルであるとし、その点から出発してある経路を通り最終的に最初の点に戻ることを考える。このように観測面



Fig. 9 位相の接合を説明する図。a-A, b-Bの間は等価な位相状態。a-B, b-Aの間は位相差 π 。

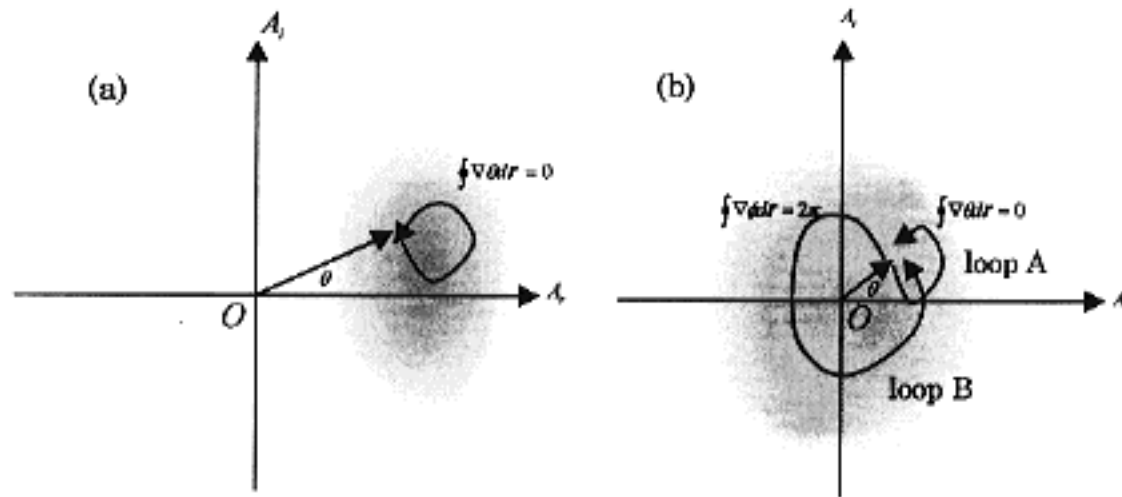


Fig. 10 複素振幅の複素平面上の分布と位相の周回積分。(a): 原点 O を含まない分布, (b): 原点 O を含む分布 (右)。

上の位置を変えると複素振幅が変化し、これに対応して複素平面上でひとつの軌跡が得られる。この軌跡は複素振幅の許される範囲の中であり、最初の点に戻ると閉じたループになる。このときには、この1周にわたる位相変化 $\nabla\theta(x,y)$ の周回積分は、Fig.10 (a)の場合にはどのような経路をとっても

$$\oint \nabla\theta(x,y) dx dy = 0 \quad (10)$$

である。つまり、1周したことによる位相のとびはなく、位相渦にはなり得ない。Fig. 1 に示した通常の干渉縞はこのような状況にある。

一方、散乱体の位相変動が大きく、標準偏差で π 程度になると、複素平面上の確率密度分布は Fig.10 (b) のようなゼロ平均分布になる。この場合、観測面上である点から出発し、最終的にその点に戻る経路を考えると、対応する複素面上で同様に軌跡が得られる。しかし、この場合にはその軌跡に依存して位相変化の周回積分値は異なる結果になる。ひとつは、Fig.10 (b) で原点 O を含まない loop A のような場合で、このときには式(10)が成立する。もう一つは、原点 O を取り囲む loop B のような場合で、位相 θ は原点を回るにつれて増加し1周することで位相は 2π 増える。すなわち、位相変化の周回積分は

$$\oint \nabla\theta(x,y) dx dy = 2\pi \quad (11)$$

となる。これは、正に位相渦の場合に他ならない。

結論的に、位相渦は散乱場の複素振幅の分布が Fig.10 (b) に示すような原点 O を含んで分布するときに発生する。そして、その分布の原点がゼロ強度であるので、観測面においてはゼロ強度の点を含む領域に位相渦は発生する。しかし、ゼロ強度点であってもその周りの位相変化が式(10)を満足する場合があるので、その点でいつも位相渦が発生するとは限らない。

8. おわりに

この研究では、散乱物体から出射する光波の位相の標準偏差を種々に変えて位相渦の現れを調べ、その結果次のような知見が得られた。

- ・位相渦は、散乱強度がゼロの点の周りに発生する。しかし、これは必要条件であって、散乱強度がゼロの点で位相渦がいつも発生するとは限らない。
- ・位相渦は、隣接するスペックルの位相が不整に接合したときに発生する。これらの様子は、Fig. 2においても見る事ができる。
- ・Fig. 7やFig. 8の干渉縞に見られるように、個々のスペックルの内部では、干渉縞はほぼ整列している。このことは、個々のスペックルの内部では位相がほぼ一定であることを示している。

本研究は、北海学園大学ハイテクリサーチセンターの研究プロジェクト「知的画像・言語情報処理システムにおける情報統合処理技術の研究開発」の一環として行った。

参考文献

- (1) 武田光夫：「光の位相に渦をみる：位相アンラップ問題」, 応用物理, 第65巻, 第8号, pp.811-816 (1996).
- (2) 外丸敏夫, 宮本洋子, 武田光夫：「粗面により散乱された光波動場の位相特異点の空間構造」, Optics Japan' 98 予稿集 pp.345-346 (1998).
- (3) I. Freund: "Optical vortices in Gaussian random wave fields: statistical probability densities," J. Opt. Soc. Am., A, Vol.11, No.5, 1644-1652 (1994).
- (4) I. Freund: "Phase correlations at neighbouring intensity critical points in Gaussian random optical fields," Appl. Opt., Vol.37, No.32, 7560-7567 (1998).
- (5) 高井信勝：「ガウシヤンスペックルの等確率密度楕円」, 北海学園大学工学部研究報告, 第27号, pp.115-130 (2000).
- (6) N.Takai, H.Kadono, and T.Asakura: 'Statistical properties of speckle phase in image and diffraction fields,' SPIE Proceedings, No.102, 834-843 (1985).
- (7) 朝倉利光, 高井信勝：「スペックル」, 光工学ハンドブック pp.195-214 (朝倉書店, 1986).