AHPにおける重要度のファジィ集合を用いた表現法

One Representation of Weights in AHP using Fuzzy Sets

大西　真一　　　今井　英幸
Shin-ichi Ohnishi　　　Hideyuki Imai

北海学園大学工学部
Faculty of Engineering,
Hokkai-Gakuen University

北海道大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering,
Hokkaido University

Abstract　Analytic Hierarchy Process (AHP) was proposed by Saaty, T. L. in 1977, and has been widely used in decision making. When we actually use AHP, it often occurs that a comparison matrix has a little bad consistency, since there are many activities. In these cases, we consider that decision makers answers have ambiguous or fuzziness and that the weights also contain them. Therefore, the necessity to represent the weights using fuzzy sets arises. To see how fuzzy the weights are, the result of sensitivity analysis is useful. In this paper, we propose a fuzzy weight in AHP. It shows how the result of the AHP has fuzziness, when consistency of comparison matrix is a little bad.

1.はじめに

意思決定の一手法にSaatyにより提案されたＡＨＰがあり，現在でも広く使われている．しかし実際の応用においては一対比較行列の整合度が悪い場合がよくあり，結果としての重要度もあいまいさを含むものとなってしまう．そこで本研究では感度分析の結果を用いたファジィ集合により重要度を表現することを提案する．それによりどのようなあいまいさが代替案の重要度に含まれているのかを調べることが可能となる．

2.AHPの手順と一対比較行列の整合度

AHPの手順は以下のとおりである．

(1) 階層図の作成：複雑な状況下にある問題を階層構造に分解する．

(2) 各階層の要素間の一対比較：ここで一対比較行列Aの要素a_{ij}は評価項目iがjと比べて，どの程度重要であるかによって$1/9, 1/8, \ldots, 1, 2, \ldots, 9$の値をとり，$a_{ji} = 1/a_{ij}$とする．

(3) 重要度(ウェイト）の計算：本研究では比較行列の最大固有値に対する固有ベクトルを用いる．

(4) 重要度の合成による代替案の評価：各レベルの要素間の重要度を用いた階層全体の重みづけにより，総合目的に対する各代替案の優先順位が決定する．

また，一対比較行列の各成分はあくまでも2つの項目の価値の比較であるから，全体として首尾一貫した整合性を持っているかはわからない．そこで全体の整合性を計る整合度C.I.が次のように定義されている．

$$\mathrm{C.I.} = \frac{\lambda_A - n}{n-1}. \qquad (1)$$

ここでnは行列Aのサイズ，λ_Aは行列Aの最大固有値である．常に$\mathrm{C.I.} \geq 0$が成り立ち，C.I.の値が小さいほど整合性があることを示している．一般には$\mathrm{C.I.} \leq 0.1$であれば整合性があるとみなせる．

3.AHPにおける感度分析

実際のAHPの応用においては，整合度が悪く結果が信頼性のないものになったり，代替案の総合重要度にあまり差がないため代替案の選択が困難な場合がある．このとき一対比較行列の成分が整合度や重要度に対してどのように影響を与えているかを調べることは結果の解釈に手がかりをもたらしたりデータの構造を知る上で重要である．そこで一対比較行列Aの要素a_{ij}に対して感度分析を行う必要性が生じる．本研究ではデータの構造を変えずに簡便に使用できる方法[2][3] を利用する．

一対比較行列$A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n$に摂動を与えた行列を$A(\varepsilon) = A + \varepsilon D_A,\ D_A = (a_{ij}d_{ij})$とすると，$a_{ji} = 1/a_{ij}$から$d_{ji} = -d_{ij}$が成り立つ．$A$は正の正方行列なのでペロン·フロベニウスの定理からその最大固有値（フロベニウス根）は単純根であり，AとA'のフロベニウス根は等しい．これらの性質から次の定理を得る．

定理1.　Aのフロベニウス根をλ_A，それに対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{w}_1$，A'のフロベニウス根$(= \lambda_A)$に対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{w}_2$とすると，$A(\varepsilon)$のフロベニウス根$\lambda(\varepsilon)$および対応する固有ベクトル$\boldsymbol{w}_1(\varepsilon)$

は

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_A + \varepsilon\lambda^{(1)} + o(\varepsilon), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{w}_1(\varepsilon) = \boldsymbol{w}_1 + \varepsilon\boldsymbol{w}^{(1)} + \boldsymbol{o}(\varepsilon), \tag{3}$$

と表すことができる．ただし

$$\lambda^{(1)} = \frac{\boldsymbol{w}_2' D_A \boldsymbol{w}_1}{\boldsymbol{w}_2' \boldsymbol{w}_1}, \tag{4}$$

であり，$\boldsymbol{w}^{(1)}$は

$$(A - \lambda_A I)\boldsymbol{w}^{(1)} = -(D_A - \lambda^{(1)} I)\boldsymbol{w}_1, \tag{5}$$

を満たすn次元ベクトル，$\boldsymbol{o}(\varepsilon)$は全ての要素が$o(\varepsilon)$である$n$次元ベクトルを表すものとする．

この定理から整合度と重要度の変動に対する次の2つの系が得られる．

系1.(整合度の感度分析)　摂動を与えた後の整合度C.I.(ε)は適当な係数g_{ij}を用いて次のように表現できる

$$\text{C.I.}(\varepsilon) = \text{C.I.} + \varepsilon\sum_i^n\sum_j^n g_{ij}d_{ij} + o(\varepsilon). \tag{6}$$

系2.(重要度の感度分析)　摂動を与えた後の重要度の変動$\boldsymbol{w}^{(1)} = (w_k^{(1)})$は適当な係数$h_{ij}^{(k)}$を用いて次のように表現できる

$$w_k^{(1)} = \sum_i^n\sum_j^n h_{ij}^{(k)} d_{ij}. \tag{7}$$

上記2つの系の係数$g_{ij}, h_{ij}^{(k)}$からそれぞれ，整合度や重要度に対する一対比較行列の成分の影響の大きさを評価することができる．

4. ファジィ集合による重要度の表現

実際のAHPの応用においては，代替案数が多い場合などに一対比較行列の整合度がやや悪いという事態がよく起きる．そのようなときは一対比較行列の各成分（意思決定者の判断）があいまいさを含んでいると考えられるので，重要度もまたあいまいさを含んだ形で表現することが望ましい．そこでファジィ集合を用いて重要度を表現することが必要となる．

本研究ではL-Rファジィ数を用いて重要度を表現する方法を提案する．系1と系2に現れた係数の積$g_{ij}h_{ij}^{(k)}$は，一対比較行列の成分a_{ij}が項目kに与える影響と見ることができる．ここで係数g_{ij}は常に正であるので，係数$h_{ij}^{(k)}$が正なら項目kの真の重要度は，クリスプな重要度w_{1k}よりも大きいと考えられ，負であれば小さいと考えられる．よって係数$h_{ij}^{(k)}$の符号はファジィ数の広がりの方向を示している．さらに，整合度C.I.が大きくなればあいまい性が増しているので，結局，積C.I.$g_{ij}|h_{ij}^{(k)}|$が項目kの重要度を表すファジィ数の（一対比較行列の成分a_{ij}に関する）広がりの大きさとなる．

定義(ファジィ重要度)　w_{1k}を項目kのクリスプな重要度とし，$g_{ij}, h_{ij}^{(k)}$をそれぞれ系1，系2で計算された係数とする．整合度がやや悪い$0.1 < \text{C.I.} < 0.2$のときには，項目kの重要度は次のL-Rファジィ数$\tilde{v_k}$で表現される．

$$\tilde{v_k} = (w_{1k}, p_k, q_k)_{LR}, \tag{8}$$

ここで

$$p_k = \text{C.I.}\sum_i^n\sum_j^n s(+, h_{ij}^{(k)}) g_{ij}|h_{ij}^{(k)}|, \tag{9}$$

$$q_k = \text{C.I.}\sum_i^n\sum_j^n s(-, h_{ij}^{(k)}) g_{ij}|h_{ij}^{(k)}|, \tag{10}$$

$$s(+, h) = \begin{cases} 1 & (h > 0), \\ 0 & (h \le 0), \end{cases}$$

$$s(-, h) = \begin{cases} 0 & (h > 0), \\ 1 & (h \le 0). \end{cases}$$

ファジィ重要度$\tilde{v_k}$を用いると，整合度がやや悪い場合の処理が可能になり，さらにどのようなあいまいさが重要度に含まれているのかを簡便に評価することが可能となる．

参考文献

[1] Saaty,T.L.: A scaling method for priorities in hierachical structures, *Journal of Mathematical Psycology*, Vol.15, No.3, pp.234-281, 1977.

[2] Saaty,T.L.: The Analytic Hierarchy Process, *McGraw-Hill*, 1980.

[3] 大西真一,今井秀幸,河口至商: ファジィAHPにおける感度分析を用いた重要度の安定性の評価, 日本ファジィ学会誌, Vol.9, No.1, pp.140-147, 1997.

[4] Shin-ichi Ohnishi,Hideyuki Imai: Evaluation for a Stability of Fuzzy Decision Making Using a Sensitivity Analysis, *1998 Conference of the NAFIPS*, U.S.A, 20 Aug., pp.86-90, 1998.

[5] Shin-ichi Ohnishi,Hideyuki Imai: One Extension of Analytic Hierarchy Process Using Fuzzy Sets, *VJ-FUZZY'98 Proceedings*, Vietnam, 2 Oct., pp.356-361, 1998.

[問い合わせ先]

〒064-0926　札幌市中央区南26条西11丁目
北海学園大学工学部
大西 真一
Tel.：011-841-1161 Ext.862
Fax.：011-551-2951
E-mail：ohnishi@eli.hokkai-s-u.ac.jp