2010年度制御工学Ⅱ　第8回宿題解答

１．

可制御行列 $\mathbf{U}_C = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det \mathbf{U}_C = -1 \neq 0$ 可制御なので最適レギュレータを構成できる.

２．

リッカチ代数方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

３．次のページへ続く

リッカチ代数方程式をまとめると

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & P_{11} \\ 0 & P_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{12}^2 & P_{12}P_{22} \\ P_{12}P_{22} & P_{22}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

各行列要素の和が0になることから，次の連立方程式が成立する．

$5 - P_{12}^2 = 0 \quad (1)$

$P_{11} - P_{12}P_{22} = 0 \quad (2)$

$2P_{12} + 5 - P_{22}^2 = 0 \quad (3)$

式(1)より

$P_{12}{}^2 = 5 \quad P_{12} = \sqrt{5}\ , P_{12} = -\sqrt{5}$

$P_{12} = \sqrt{5}$の時，式(3)より

$P_{22}{}^2 - 2P_{12} - 5 = 0$に代入して$P_{22}{}^2 = 2\sqrt{5}\ +5$

$P_{22} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}, P = -\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

式(2)より

$P_{11} = P_{12}P_{22} = \sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}, -\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$P_{12} = -\sqrt{5}$の時，式(3)より

$P_{22}{}^2 - 2P_{12} - 5 = 0$に代入して$P_{22}{}^2 = -2\sqrt{5}\ +5$

$P_{22} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, P = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

式(2)より

$P_{11} = P_{12}P_{22} = -\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

以上をまとめると

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & \sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

シルベスターの判定を適用すると，

正定な行列が次のように求められる．

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.882 & 2.236 \\ 2.236 & 3.078 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{h}\mathbf{b}^T\mathbf{P} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & -\sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.236 & -3.078 \end{bmatrix}$$

４．

最適レギュレータの極を求めるために特性方程式を計算する．

$$\det\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bf}\right]=\left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 & f_1 \end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix} s & -1 \\ -f_0 & s-f_1 \end{vmatrix}=s^2-f_1 s-f_0$$

$$=s^2+\sqrt{5+2\sqrt{5}}s+\sqrt{5}=0$$

$$s=\frac{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\pm\sqrt{5+2\sqrt{5}-4\sqrt{5}}}{2}=\frac{-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2}=-1.176,-1.902$$

５．

MATLAB による検証

・状態空間表現

```
>> A=[0 1; 0 0];
b=[0 ;1];
c=[1 0];
sys=ss(A,b,c,0);
```

・最適レギュレータ

```
>> [K,S,E] =lqr(A,b,[5 0; 0 5],1)
K =                //フィードバックベクトル，手計算の場合と符号が逆である．
     2.2361    3.0777
S =                //P 行列
     6.8819    2.2361
     2.2361    3.0777
E =                //最適レギュレータによる極
    -1.9021
    -1.1756
```

以上より３，４の計算結果と一致することが確認できる．