

1 .

- (1) 伝達関数法
- (2) 現代制御理論
- (3) 伝達関数
- (4) PID 調節器
- (5) ブロック線図
- (6) 内部情報
- (7) 状態空間表現
- (8) 状態変数線図
- (9) 状態変数
- (10) 極配置手法
- (11) 可制御正準形式
- (12) Ackermann
- (13) 配置極
- (14) 可制御
- (15) 計測
- (16) オブザーバ
- (17) 最小
- (18) 最適レギュレータ
- (19) 線形 2 次形式レギュレータ (LQR) (18),(19)は入れ替わってもよい.
- (20) リッカチ方程式

2 .

(1)

$$\text{可制御行列 } \mathbf{U}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{U}_c = -1 \neq 0$$

よって可制御である.

$$\text{可観測行列 } \mathbf{U}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{U}_o = 1 \neq 0$$

よって可観測である.

(2)

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 0] \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)} \end{aligned}$$

(3) 上記伝達関数より

極は $s(s+1)=0$ を解いて 0, -1

零点は存在しない.

(4)

$$e^{At} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) & u(t) - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} u(t) & u(t) - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

なお, $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T}{s(s+1)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s(s+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

(5) 可制御なので極配置が可能

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{f}] = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -f_0 & s+1-f_1 \end{vmatrix} = s^2 + (1-f_1)s - f_0 = 0$$

配置極特性方程式は

$$(s+2)(s+3) = 0, \quad \text{すなわち} \quad s^2 + 5s + 6 = 0$$

両式の係数を等しく置くと

$$\begin{aligned} 1 - f_1 &= 5, \quad -f_0 = 6 \\ \therefore f_1 &= -4, \quad f_0 = -6 \end{aligned}$$

フィードバックベクトルは $\mathbf{f} = [-6 \quad -4]$

(6)

可観測なので同次元オブザーバを構成できる.

オブザーバの係数ベクトルを $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix}$ とする.

特性方程式は

$$\begin{aligned} \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{k}\mathbf{c})] &= \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} s - k_0 & -1 \\ -k_1 & s + 1 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (1 - k_0)s - k_0 - k_1 = 0 \end{aligned}$$

配置極特性方程式は

$$(s+4)(s+5) = s^2 + 9s + 20 = 0$$

両方の特性方程式の係数を等しくおくと

$$1 - k_0 = 9, -k_0 - k_1 = 20 \therefore k_0 = -8, k_1 = -12$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \end{bmatrix}$$

(7) 可制御なので最適レギュレータを構成できる.

リッカチ代数方程式は

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(8)

(7) の式を整理すると

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_{11} - P_{12} & P_{12} - P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & P_{11} - P_{12} \\ 0 & P_{12} - P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{12}^2 & P_{12}P_{22} \\ P_{12}P_{22} & P_{22}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

行列の各要素を計算すると

$$1 - P_{12}^2 = 0 \quad (1)$$

$$P_{11} - P_{12} - P_{12}P_{22} = 0 \quad (2)$$

$$2P_{12} - 2P_{22} + 1 - P_{22}^2 = 0 \quad (3)$$

式(1)より

$$P_{12} = 1, -1$$

$P_{12} = 1$ の時(3)より

$$2 - 2P_{22} + 1 - P_{22}^2 = 0$$

$$(P_{22} - 1)(P_{22} + 3) = 0$$

$$P_{22} = 1, P_{22} = -3$$

$P_{22} = 1$ の時(2)より

$$P_{11} - 1 - 1 = 0 \quad P_{11} = 2$$

$P_{22} = -3$ の時(2)より

$$P_{11} - 1 + 3 = 0 \quad P_{11} = -2$$

$P_{12} = -1$ の時(3)より

$$-2 - 2P_{22} + 1 - P_{22}^2 = 0$$

$$(P_{22} + 1)^2 = 0$$

$$P_{22} = -1$$

(2)より

$$P_{11} + 1 - 1 = 0 \quad P_{11} = 0$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

シルベスターの条件より正定な \mathbf{P} は

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

固有値(極)は

$$\det \left[\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = 0$$

$$s(s+2)+1=0$$

$$(s+1)^2 = 0$$

$$s = -1(\text{二重根})$$

参考までに 2010 年度制御工学 II 演習問題の MATLAB 解

(2)

```
>> sys1=ss([0 1; 0 -1],[0; 1],[1 0],0);
```

```
>> tf(sys1)
```

伝達関数:

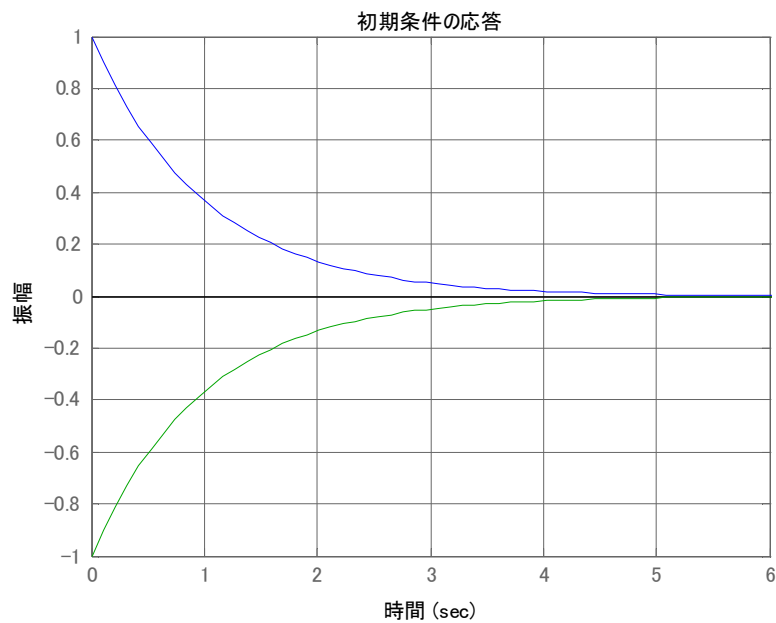
```
1  
-----  
s^2 + s
```

(4)

```
>> sys2=ss([0 1; 0 -1],[0; 1],[0 1],0);
```

過渡応答

```
>> initial(sys1,sys2,[1; -1])
```



(5)

極配置

```
>> f=place([0 1; 0 -1],[0; 1],[-2; -3])
```

f =

```
-6.0000 -4.0000
```

(6)

オブザーバ極配置

```
>> k=place([0 0; 1 -1],[1; 0],[-4; -5])
```

k =

-8.0000 -12.0000

>> K=k'

K =

-8.0000
-12.0000

(8)

最適レギュレータ

>> [K,S,E]=lqr([0 1; 0 -1],[0; 1],[1 0; 0 1],1)

K =

1.0000 1.0000

S =

2.0000 1.0000
1.0000 1.0000

以上いずれも手計算結果と一致する。