2011 年 1 月 17 日の講義中配布　2010 年度制御工学Ⅱ　演習問題解答

2011.1.17

１.

(1) 伝達関数法
(2) 現代制御理論
(3) 伝達関数
(4) PID 調節器
(5) ブロック線図
(6) 内部情報
(7) 状態空間表現
(8) 状態変数線図
(9) 状態変数
(10) 極配置手法
(11) 可制御正準形式
(12) Ackermann
(13) 配置極
(14) 可制御
(15) 計測
(16) オブザーバ
(17) 最小
(18) 最適レギュレータ
(19) 線形 2 次形式レギュレータ(LQR)　(18),(19)は入れ替わってもよい.
(20) リッカチ方程式

２.

（１）

可制御行列 $\mathbf{U}_C=\begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad \det\mathbf{U}_C=-1\neq 0$

よって可制御である.

可観測行列 $\mathbf{U}_O=\begin{bmatrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{cA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \det\mathbf{U}_O=1\neq 0$

よって可観測である.

（２）

$$G(s)=\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 1 & s\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s(s+1)}$$

（３）上記伝達関数より

極は $s(s+1)=0$ を解いて 0,-1

零点は存在しない.

（4）

$$e^{\mathbf{A}t}=L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(t) & u(t)-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}u(t) & u(t)-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{bmatrix}$$

なお，$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{adj\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}}=\dfrac{\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 1 & s\end{bmatrix}^T}{s(s+1)}=\dfrac{\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}}{s(s+1)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$

（5）可制御なので極配置が可能

$$\det\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bf}\right]=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_0 & f_1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}s & -1\\ -f_0 & s+1-f_1\end{vmatrix}=s^2+\left(1-f_1\right)s-f_0=0$$

配置極特性方程式は

$(s+2)(s+3)=0$, すなわち $s^2+5s+6=0$

両式の係数を等しく置くと

$1-f_1=5,\ -f_0=6$

$\therefore f_1=-4,\ f_0=-6$

フィードバックベクトルは $\mathbf{f}=\begin{bmatrix}-6 & -4\end{bmatrix}$

（6）

可観測なので同一次元オブザーバを構成できる．

オブザーバの係数ベクトルを $\mathbf{k}=\begin{bmatrix}k_0\\ k_1\end{bmatrix}$ とする．

特性方程式は

$$\det\left[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{kc})\right]=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_0\\ k_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}s-k_0 & -1\\ -k_1 & s+1\end{vmatrix}$$

$=s^2+\left(1-k_0\right)s-k_0-k_1=0$

配置極特性方程式は

$(s+3)(s+4)=s^2+7s+12=0$

両方の特性方程式の係数を等しくおくと

$1-k_0=7,\ -k_0-k_1=12 \therefore k_0=-6, k_1=-6$

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix}-6\\-6\end{bmatrix}$$

（７）可制御なので最適レギュレータを構成できる.

リッカチ代数方程式は

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

（８）

（７）の式を整理すると

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\P_{11}-P_{12} & P_{12}-P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & P_{11}-P_{12}\\0 & P_{12}-P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_{12}{}^2 & P_{12}P_{22}\\P_{12}P_{22} & P_{22}{}^2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

行列の各要素を計算すると

$1-P_{12}{}^2=0 \quad (1)$

$P_{11}-P_{12}-P_{12}P_{22}=0 \quad (2)$

$2P_{12}-2P_{22}+1-P_{22}{}^2=0 \quad (3)$

式(1)より

$P_{12}=1,-1$

$P_{12}=1$の時(3)より

$2-2P_{22}+1-P_{22}{}^2=0$

$(P_{22}-1)(P_{22}+3)=0$

$P_{22}=1, P_{22}=-3$

$P_{22}=1$の時(2)より

$P_{11}-1-1=0 \quad P_{11}=2$

$P_{22}=-3$の時(2)より

$P_{11}-1+3=0 \quad P_{11}=-2$

$P_{12}=-1$の時(3)より

$-2-2P_{22}+1-P_{22}{}^2=0$

$(P_{22}+1)^2=0$

$P_{22}=-1$

(2)より

$P_{11}+1-1=0 \quad P_{11}=0$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

シルベスターの条件より正定な $\mathbf{P}$ は

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

固有値(極)は

$$\det\left[\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = 0$$

$$s(s+2)+1=0$$

$$(s+1)^2 = 0$$

$s=-1$(二重根)

参考までに　2010 年度制御工学Ⅱ演習問題の MATLAB 解

(2)

```
>> sys1=ss([0 1; 0 -1],[0; 1],[1 0],0);

>> tf(sys1)
```

伝達関数:

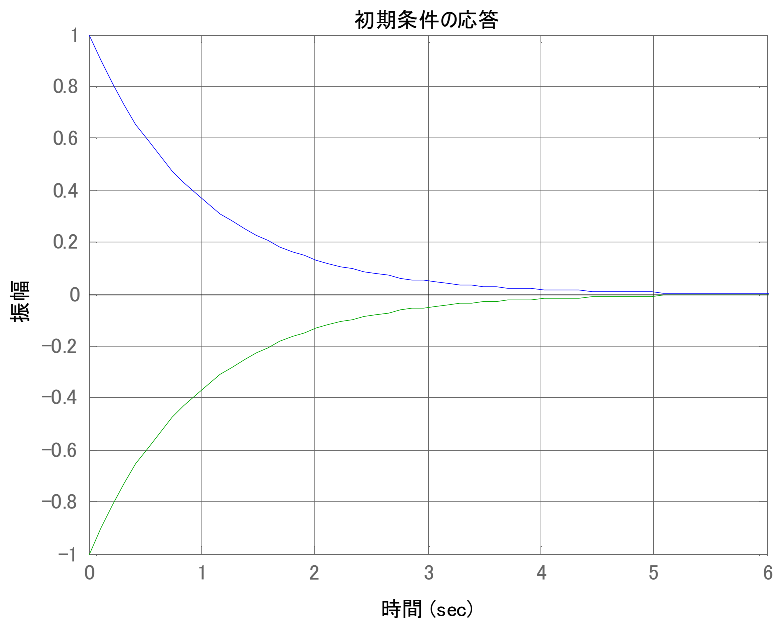
```
   1
-------
s^2 + s
```

(4)

```
>> sys2=ss([0 1; 0 -1],[0; 1],[0 1],0);
```

過渡応答

```
>> initial(sys1,sys2,[1; -1])
```



(5)

極配置

```
>> f=-place([0 1; 0 -1],[0; 1],[-2; -3])

f =

   -6.0000    -4.0000
```

(6)

オブザーバ極配置

```
>> k=-place([0 0; 1 -1],[1; 0],[-3; -4])
```

```
k =

    -6.0000   -6.0000

>> K=k'

K =

    -6.0000
    -6.0000
```

(8)
最適レギュレータ

```
>> [K,S,E]=lqr([0 1; 0 -1],[0; 1],[1 0; 0 1],1)

K =

     1.0000      1.0000


S =

     2.0000      1.0000
     1.0000      1.0000
```

以上いずれも手計算結果と一致する.