連続時間系最適レギュレータ系（多入力多出力，無限制御時間の場合）の構成と証明

$\left[\text{制御対象}\right]$ $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{Ax}(t)+\mathbf{Bu}(t),\quad \mathbf{y}(t)=\mathbf{Cx}(t),\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$

$\left[\text{評価関数}\right]$ $J=\dfrac{1}{2}\int_0^\infty\left[\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Qx}(t)+\mathbf{u}(t)^T\mathbf{Hu}(t)\right]dt$　但し、$\mathbf{H}$は正定対称$(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\mathbf{H})$

制御対象が可制御であるなら，評価関数を最小にする最適制御入力が存在し，それは $\mathbf{u}(t)=-\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)=\mathbf{Fx}(t)$　$\left(\mathbf{F}=-\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\right)$である．また，その時，評価関数の値は $J_{\min}=\dfrac{1}{2}\mathbf{x}_0{}^T\mathbf{Px}_0$ となる．ここで$\mathbf{P}$は次のリッカチ代数方程式の正定な対称解$(\mathbf{P}^T{=}\mathbf{P})$ である．

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{PA}-\mathbf{PBH}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{O}$$

簡単な証明，即ちリッカチ代数方程式の$\mathbf{Q}$ を評価関数に代入すると，Jを最小化する $\mathbf{u}(t)=-\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)$ が求まり，$J_{\min}=\dfrac{1}{2}\mathbf{x}(0)^T\mathbf{Px}(0)$ となることを示す．
（白石昌武著　入門現代制御工学，pp. 99-101，啓学出版，1994. による．）

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\mathbf{x}(t)^T\left(\mathbf{PBH}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}-\mathbf{PA}-\mathbf{A}^T\mathbf{P}\right)\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}(t)^T\mathbf{Hu}(t)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBH}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)-\mathbf{x}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{PAx}(t)-\mathbf{x}(t)^T\mathbf{A}^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{u}(t)^T\mathbf{Hu}(t)\right]dt$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Px}(t)\right\}=\dot{\mathbf{x}}(t)^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t)\qquad\left(\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{Ax}(t)+\mathbf{Bu}(t)\text{を代入する}\right)$$

$$=\left\{\mathbf{Ax}(t)+\mathbf{Bu}(t)\right\}^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{P}\left\{\mathbf{Ax}(t)+\mathbf{Bu}(t)\right\}$$

$$=\left\{\left(\mathbf{Ax}(t)\right)^T+\left(\mathbf{Bu}(t)\right)^T\right\}\mathbf{Px}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PAx}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBu}(t)$$

$$=\mathbf{x}(t)^T\mathbf{A}^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{u}(t)^T\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PAx}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBu}(t)$$

$$\therefore -\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PAx}(t)-\mathbf{x}(t)^T\mathbf{A}^T\mathbf{Px}(t)=\mathbf{u}(t)^T\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBu}(t)-\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Px}(t)\right\}$$

この式を上記のJに代入する．

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBH}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{u}(t)^T\mathbf{Hu}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBu}(t)+\mathbf{u}(t)^T\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)-\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Px}(t)\right\}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\mathbf{u}(t)^T\mathbf{Hu}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBH}^{-1}\mathbf{Hu}(t)+\mathbf{u}(t)^T\mathbf{HH}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBH}^{-1}\mathbf{HH}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)\right]dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Px}(t)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{\mathbf{u}(t)^T+\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBH}^{-1}\right\}\mathbf{H}\left\{\mathbf{u}(t)+\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)\right\}dt-\frac{1}{2}\mathbf{x}(\infty)^T\mathbf{Px}(\infty)+\frac{1}{2}\mathbf{x}(0)^T\mathbf{Px}(0)$$

J の最小値が存在するので，

$$\mathbf{x}(\infty)=0,\ \left(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)\right)^T=\mathbf{x}(t)^T\mathbf{P}^T\mathbf{BH}^{-1T}=\mathbf{x}(t)^T\mathbf{PBH}^{-1}\quad\left(\because\mathbf{P}^T=\mathbf{P},\ \ \mathbf{H}^T=\mathbf{H}\right)$$

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{\mathbf{u}(t)+\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)\right\}^T\mathbf{H}\left\{\mathbf{u}(t)+\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)\right\}dt+\frac{1}{2}\mathbf{x}(0)^T\mathbf{Px}(0)$$

$\mathbf{H}$ が正定なので，積分内は $\mathbf{u}(t)+\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)=\mathbf{0}$ の時最小となる．

$$\therefore\mathbf{u}(t)=-\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{Px}(t)$$

最小値 $J_{\min}=\dfrac{1}{2}\mathbf{x}(0)^T\mathbf{Px}(0)$

証明終わり