状態方程式の過渡応答について

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (1)$

の解が次式であることの簡略な証明をする．

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau \quad (2)$$

式(2)を変形する．

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\{\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}u(\tau)d\tau\}$$

この式を微分すると

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\{\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}u(\tau)d\tau\} + e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b}u(t)$$

$$= \mathbf{A}\{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau\} + \mathbf{b}u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

よって式(2)は式(1)を満足する．

なお，上記の微分演算では以下の定積分の定理（微積分学の基本定理）を適用した．

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$　とすれば

$\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$　ただし　$a < x < b$