相反性（reciprocity）

図 1 に示される梁を考えよう．最初に，$\frac{1}{2}P_1\delta_{11}$に等しい固有仕事（eigen work）を引き起こす 1 点に作用する荷重P_1を与える．そこではPとδの間に線形関係が仮定されている．ここにδ_{ij}は点 i でのP_jによる変位を意味する．また固有仕事はW_{ii}によって記述する．

さて，別な荷重P_2が点 2 において，図 1 の梁に作用していると考えよう．この荷重は点 2 でのδ_{22}とは別の変位，点 1 の変位δ_{12}を引き起こす．したがって，2 種類の仕事が荷重P_2によって引き起こされ，第 1 番目は荷重P_2の固有仕事，もしPとδが線形と仮定されるなら，それは$W_{22}=\frac{1}{2}P_2\delta_{22}$と第 2 番目は荷重$P_2$により引き起こされた 1 点の変位：$\delta_{12}$による荷重$P_1$によって成される変位仕事（displacement work）：$W_{12}=P_1\delta_{12}$である．変位仕事はW_{ij}で表記される．第 2 の添字は常に仕事の原因となる力を表わし，第 1 添字は変位が生じている場所を表わす．システムの外力(荷重)の固有仕事は，

$$W_{eig}=\sum_{i=1}^{2}W_{ii}=W_{11}+W_{22}=\int P_1 d\delta_{11}+\int P_2 d\delta_{22}=\frac{1}{2}P_1\delta_{11}+\frac{1}{2}P_2\delta_{22}$$

一方，変位仕事は，$W_{dis}=\sum_{i,j}^{n}W_{ij}=W_{12}=\int P_1 d\delta_{12}$

P_1はこの変位の間変わらないので，次式を得る．$W_{dis}=P_1\delta_{12}$

そして，トータル仕事W_tは，$W_t=W_{eig}+W_{dis}=W_{11}+W_{22}+W_{12}$

$$=\frac{1}{2}P_1\delta_{11}+\frac{1}{2}P_2\delta_{22}+P_1\delta_{12} \qquad \sim(1)$$

上記とは逆順に載荷する，即ち荷重P_2を先に荷重P_1を 2 番目に載荷すると，トータル仕事W_tは，$W_t=W_{eig}+W_{dis}=W_{11}+W_{22}+W_{21}=\frac{1}{2}P_1\delta_{11}+\frac{1}{2}P_2\delta_{22}+P_2\delta_{21}$ 　～(2)

(1)=(2)より，$P_1\delta_{12}=P_2\delta_{21}$　撓み性をf_{ij}で表すと，$P_1(f_{12}P_2)=P_2(f_{21}P_1)$

したがって，$f_{12}=f_{21}$　　一般形では，$f_{ij}=f_{ji}$

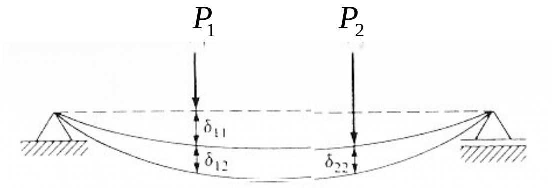

図　1

これは，マックスウェルの相反定理（Maxwell's reciprocal theorem）として知られている．

- 撓み性マトリックスは対称マトリックスである．
- 対称マトリックスの逆マトリックスは対称マトリックスである．
- 撓み性マトリックスの逆マトリックスは剛性マトリックスである．

以上のことより，剛性マトリックスは対称マトリックスである．

即ち，$k_{ij}=k_{ji}$